FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

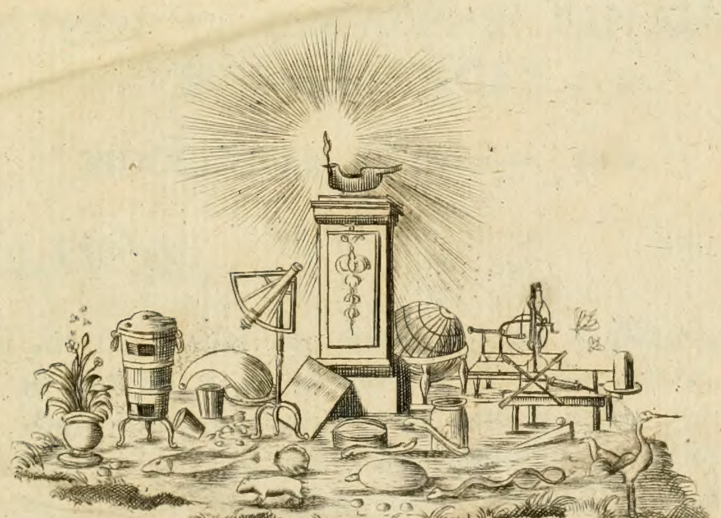
AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

5.06 (47.4

pro Anno MDCCLXXXII.

PARS PRIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXVI.

4/22/1916/coll

16. 70289. April 28

AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXXII. Janvier —— Juin.

POPULATION

Eſſai ſur les Tables des mariages, des naiſſances, & des morts de la Ville de St. Pétersbourg, dans la période de 17 ans, depuis 1764 jusqu'à 1780: précédé d'une expoſition générale de l'utilité qu'auroient de pareilles Tables, ſi elles s'étendoient ſur des Gouvernemens entiers de la Ruſſie. Par M. Krafft - - Page 3.

ÉCONOMIE ET HISTOIRE NATURELLE

Extrait des Lettres de M. Hablitz'l, *Correſpondant de l'Académie* Page

Sur la culture des prairies en Boucharie - - 67.

Obſervations d'hiſtoire naturelle faites ſur les côtes de la mer Caſpienne - - - - - 69.

ASTRONOMIE

Obſervations de la Comète de 1781 *extraites d'une lettre de M. l'Abbé* Chrétien Mayer - - 72.

Obſervations de la nouvelle Planète découverte par M. Herſchel, *communiquées par le même* 75.

MÉTÉOROLOGIE.

Hyver de 1781 *à* 1782 - - - - 78.

PROGRAMME *pour l'année* 1784 - - - 84.

CHANGEMENS *arrivés dans l'Académie pendant le premier ſemeſtre de* 1782 - - - 87.

OUVRAGES *imprimés & manuſcrits, curioſités & productions d'Hiſtoire naturelle, préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le premier ſemeſtre de l'année* 1782 - - 90.

ACTA

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXXII. Pars prior.

Cum tabulis V. aeri inciſis.

MATHEMATICA

Pag.

LEONH. EVLER. *De ſymptomatibus quatuor punctorum in eodem plano ſitorum.*

Tab. I. fig. 1 — 4 - - - - 3.

—— —— *Methodus facilis omnia ſymptomata linearum non in eodem plano ſitarum inueſtigandi.*

Diſſertatio prior. Tab. I. fig. 5 — 8. *Tab. II. fig.* 1 — 3 - - - - 19.

Diſſertatio altera Tab. II. fig. 4 — 9 - 37.

AND. JOH. LEXELL. *De proprietatibus circulorum in ſuperficie ſphaerica deſcriptorum. Tab. III. fig.* 1 — 7 - - - - 58.

NICOL. FVSS. *Solutio problematis analytici non parum curioſi* - - - - 104.

Pag.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De deſcenſu baculi ſuper hypomochlio cylindrico fixo delabentis.* *Tab. I. fig.* 9. 10 - - - - - 117.

ANDR. IOH. LEXELL. *De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.* *Tab. III. fig.* 8 - - - - - 157.

PHYSICA

NICAETA SOCOLOFF. *De tractatione metallorum cum ſulphure* - - - - 193

—— —— *De natura arſenici* - - - - 209.

I. G. GEORGI. *Scrutamen chemicum calculi acipenſeris Huſonis ſeu Belugae* - - - 225.

NICOL. OSERETSKOVSKY. *De calculo ex acipenſere Sturione exemto.* *Tab. IV.* - - - - - - - - 235.

NICAETA SOCOLOFF. *Optima methodus parandi amalgama cupri* - - - - - 247.

I. G. GEORGI. *Marmorum quorundam Imperii Roſſici Analyſis chemica* - - - 253.

ASTRO-

Pag.

ASTRONOMICA

ANDR. IOH. LEXELL. *Determinatio errorum qui in longitudines et latitudines alicuius cometae geocentricas inducuntur, ex commiſſis erroribus in elementis orbitae.*
Tab. V. fig. 1 - - - - - - 281.

PETR. INOCHODZOW. *Brevis expoſitio obſervationum aſtronomicarum in vrbe Tanbow inſtitutarum* - - - - - 312.

—— —— *De ſitu geographico vrbis Kalugae, deducto ex obſervationibus aſtronomicis anno* 1784 *factis* - - - - - - 318.

NICOL. FVSS. *Supplementum in diſſertationem de motu cometarum ex tribus obſeruationibus determinando.*
Tab. V. fig. 2 — 5 - - - - - 325.

JACQ. ANDRÉ MALLET. *Obſervations aſtronomiques faites près de Génève* - - - 336.

STEPH. RVMOVSKI. *Commentatio de Eclipſi Solis anno* 1779 *die* $\frac{3}{14}$ *Junii obſervata* - - 344.

Fautes

Fautes à corriger.

dans la ſeconde Partie des Actes Académiques pour l'année 1781.

Pag. 119 ligne 3 effacés *non*

— 120 — 22 liſés $a \pm b z$.

HISTO-

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXXII.

Janvier — Juin.

POPVLATION.

Eſſai ſur les Tables des mariages, des naiſſances & des morts de la Ville de St. Pétersbourg, dans la période de 17 ans, depuis 1764 jusqu'à 1780: precédé d'une expoſition générale de l'utilité qu'auroient des pareilles Tables, ſi elles s'étendoient ſur des Gouvernements entiers de la Ruſſie. Par M. *Krafft*.

Celui qui le premier eût l'heureuſe idée de faire des relevés des mariages, des naiſſances & des morts du genre humain, ne pouvoit point encore entrevoir toute l'importance de cet objet, ni s'attendre à toute l'utilité,

qui en reſultéroit dans la ſuite. Il a fallû recueillir & comparer entre elles une grande quantité de pareilles tables, étendûes ſur une ſuite d'années & ſur pluſieurs endroits differens, pour être a portée de ſaiſir les importantes concluſions qu'on pouvoit en tirer, & d'aperçevoir la lumiere imprevûe qu'elles repandoient ſur nombre de récherches politiques qui intereſſent le bonheur public & le bien de l'humanité. Mais auſſi, dèsque les prémiers traits de cette lumiere eûrent une fois frappé les yeux de quelques Patriotes eclairés qui avoient entrepris la redaction & le calcul de ces tables, leur utilité ne tarda plus à paroitre dans tout ſon jour. Dès-lors on s'accorda bientôt a reconnoître, que non ſeulement elles préſentoient en général des vérités nouvelles, toutes dignes de l'attention de l'Hiſtorien de la Nature, du Médecin & du Philoſophe, qu'elles devoiloient un ordre conſtant & admirable qui préſide jusque dans ces evenemens du genre humain, où l'on ne voit ordinairement, que l'effet d'un aveugle haſard; mais auſſi, qu'elles expoſoient aux yeux des Souverains, des faits, qui ne ſe derobent à leur connoiſſance que trop ſouvent, & qui doivent cependant d'autant plus les intereſſer, qu'ils concernent la prémiere de toutes les richeſſes des États, la vie, le bienétre & l'accroiſſement de leurs ſujets. Ce n'eſt pas que jusqu' alors on manquât des moyens de s'aperçevoir de la varieté & des alterations de la population; mais ces moyens ne faiſoient connoitre que des faits, ſans en montrer les ſourçes; au lieu que ces tables indiquent les memes faits d'une maniere incomparablement plus inſtructive, & en rendent auſſi viſibles les cauſes probables; d'ou reſulte le grand avantage, que le Gouvernement ſe voit a portée d'y influer

fluer d'une façon efficace, de s'aſſurer de temps en temps du ſuccès des ſoins, avec lesquels il veille au bien public, & d'apprecier l'effet des precautions qu'il prend pour en éloigner tout obſtacle, & pour ſéconder tout ce qui le favoriſe. Ces tables ayant alors été étendües ſur un eſpace ſuffiſant de temps, & ſur une aſſés nombreuſe quantité d'hommes, differents de climats, de moeurs & de genres de vie, étoient encore ſuſceptibles d'une application plus générale. Priſes enſemble & reunies en une ſeule maſſe, elles fournirent des réſultats moyens, qui ne ſont plus affectés d'aucune influence ſenſible des circonſtances indiuiduelles & particulieres & qui préſentent par conſequent l'expreſſion la moins équivoque qu'on ait, du cours ordinaire de la Nature de l'éſpece humaine, dans la fecondité, les naiſſances, la vitalité & la mort des hommes. Connoiſſant ce que feroit la Nature, ſi elle n'étoit point troublée dans ſes operations, on eſt garanti de l'illuſion de prendre pour ſa marche ce qui n'eſt que l'effet & la ſuite des desordres, qui produits par des circonſtances particulieres, phyſiques ou morales, en derangent l'ordre ſalutaire, & qui étant en grande partie du reſſort du Gouvernement, en méritent l'attention la plus réflechie. Dès lors pluſieurs États de l'Europe, eclairés ſur leurs véritables interêts, s'impoſérent l'obligation de faire des établiſſemens formels de pareilles tables, & pluſieurs Scavans tres diſtingués s'appliquoient a les perfectionner & à fixer les principes de leur emploi au bien public & à des ſyſtemes d'adminiſtration. Ainſi portée à un certain degré de perfection cette nouvelle eſpece d'Arithmétique politique ne manqua point de compenſer par des ſuites les plus avantageuſes pour plus d'un pays les peines,

qu'on y avoit priſes de la cultiver & de la mettre en pratique & en uſage.

A peine il s'étoit écoulé une année & demi depuis le commencement du Regne glorieux de notre tres AUGUSTE SOUVERAINE, qu'apres avoir établi un College de medecine, une Maiſon des enfans trouvés, un Comptoir de tutele des colonies, & ordonné un denombrement général de Ses ſujets, *Sa Majeſté*, attentive a tout ce qui pouvoit contribuer aux progrès de la population de Son vaſte Empire, & en faire le bonheur, ordonna auſſi de conſtruire ſur un modele diſtribué en différentes langues, des tables annuelles des mariages, des naiſſances & des morts. *Sa Majeſté* a fait à cette occaſion à l'Académie des Sciences l'honneur d'ordonner en même temps, qu'on lui remit par mois des tables générales, qui devoient reunir les réſultats des tables particulieres de toutes les Paroiſſes de St. Pétersbourg. Depuis le mois de Mars de l'année 1764 l'Académie reçoit ces tables bien exactement, de façon qu'aujourd'hui elle en poſſede une ſuite de 21 années conſecutives.

Ces tables n'embraſſent à la verité que la population d'une ſeule ville; d'ailleurs vû les progrès qu'a fait depuis l'Arithmétique politique, il ſeroit à deſirer, que les modeles ſur lesquels elles ont été conſtruites, quoique bons pour leur prémier établiſſement, euſſent cependant aujourd'hui des détails plus grands, qui les rendiſſent propres à ſervir pour un plus grand nombre d'objets; & même dans l'état ou elles ſont, on pourroit ſuspecter leur parfaite exactitude dans quelques points de l'exe-

l'execution. Cependant comme elles embraſſent un long eſpace de temps; que leur plan renferme ſans contredit les détails les plus eſſentiels & les plus inſtructifs, & que leur degré de preciſion, qui n'eſt douteuſe qu'en quelques points de moindre importance, s'appreciera aiſement par leur redaction même; elles ne laiſſeront pas de fournir des réflexions intereſſantes. Ajoutons à cela, que la rédaction de ces tables telles qu'elles ſont, pourroit donner l'occaſion d'en avoir de meilleures dans la ſuite, & ſervir de modele à l'application, qu'on pourroit faire de ſemblables, étendûes à des Gouvernemens entiers. Celles-ci ſeroient alors la baſe de l'Arithmetique politique de la Ruſſie, qui non ſeulement enrichiroit de nouvelles conoiſſances cette Science en général ſi intereſſante pour les Gouvernements, mais dont auſſi cet Empire même habité de peuples d'une ſi grande varieté de climats & de moeurs, ne manqueroit certainement pas de recueillir de grands avantages pour l'acceleration des progrès de ſa nombreuſe population & pour l'accroiſſement de la proſperité publique.

Telles ont été les réflexions qui m'ont porté a entreprendre de rédiger & calculer toute la collection des tables pour la Ville de St Pétersbourg. J'en préſente dans ce Mémoire la redaction de 17 années jusqu'a 1780 incluſivement, afin d'y ajouter annuellement les années ſuivantes, & de les rediger par périodes fixées de 5 ans, ainſi que de joindre a leur reſumé général les réflexions de quelque importance, qu'elles pourroient préſenter de temps en temps. Pour le faire dans un ordre ſuivi, ſurtout ſi les tables s'étendoient à des Gouvernemens entiers; il faudra y conſerver une certaine uniformité dans les prin-

principes & dans la maniere des récherches; c'eſt pourquoi il ne ſera pas inutile de donner ici un court expoſé des principaux points de vûe, que les tables des mariages, des naiſſances & des morts preſéntent généralement.

Les nombres, que les tables les plus complettes qu'on ait, fourniſſent immediatement & qu'on peut conſequemment conſiderer dans ces ſortes de calculs comme des quantités données, ſont les ſuivans:

1) Le nombre de tous les vivans que les tables embraſſent, ſelon leurs ſexe, age & genre de vie.
2) Le nombre annuel des mariages qui ſe font entre eux.
3) celui des naiſſances.
4) celui des morts.
5) celui des morts de chaque age.
6) celui des morts de chacune des principales maladies connûes.

En combinant ces ſix nombres deux a deux, on obtient quinze rapports différens, desquels l'Arithmetique politique tire des concluſions, qui non ſeulement preſentent a l'État le flux & reflux qui de temps en temps a lieu dans les progrès & le bienètre de ſa population, mais qui mettent auſſi le Gouvernement ſur la voie d'influer avec une activité energique ſur la conſervation & la multiplication de ſes ſujets. Pour expoſer les plus inſtructifs de ces rapports avec plus d'ordre, je les range ſous trois claſſes, ſelon qu'ils concernent. 1) *la Meſure de*

de la fécondité; 2) *la Meſure de la mortalité* & 3) *la Meſure de la multiplication* ou des progrès de la population, qui eſt l'effet combiné des deux précedentes:

I. Meſure de la Fecondité.

1) *Rapport entre le nombre annuel des mariages & celui de tous les vivans.*

Ce rapport qui indique, de combien de vivans il ſe fait un mariage par an, eſt la meſure de la *fecondité intentionelle.* Il intereſſe très fort l'État d'en être informé de temps en temps, non ſeulement pour des provinces en général, mais auſſi pour des endroits principaux en particulier, puisque cette méſure qui influe immediatement ſur les progrès de la population, eſt ſujette à de grandes differences pour des endroits differens, & à des changemens très ſenſibles pour un même endroit en temps differens ou en différentes circonſtances, & que les cauſes phyſiques, morales & civiles, d'où réſultent ces differences & ces changemens, ſont en grande partie du reſſort du Gouvernement. Nous verrons plus bas la régle qui nous apprend, qu'un païs qui doubleroit ſa population en 80 ans, ſi la meſure de ſa fecondité intentionelle eſt $\frac{1}{120}$, c'eſt à dire. ſi ſur 120 vivans il ſe fait un mariage par an, y parviendroit dans la moitié de ce temps, ſi le Gouvernement pouvoit porter cette méſure à $\frac{1}{100}$, c'eſt à dire, qu'il s'en fit annuellement un ſur 100 vivans.

 2) *Rap-*

2) *Rapport entre le nombre annuel des naiſſances & celui des mariages.*

Ce rapport qui fait voir, combien, compenſant l'un avec l'autre, chaque mariage produit d'enfans, eſt la meſure de la *fecondité réelle.* Elle n'influe pas moins, que la precédente, ſur l'accroiſſement de la population. Quoiqu'on ait reconnû par un grand nombre d'obſervations, que la fecondité réelle, conſiderée généralement, eſt en tout temps & par tout presque la même, & ne depend guere du climat ou d'autres circonſtances locales: on y rencontre cependant des differences & des changemens, qui ſont cauſés par des mariages ou trop tardifs ou prématurés, ou qui tiennent à des cauſes morales, economiques ou politiques, qui ſont un objet du Gouvernement, & c'eſt pour cela, qu'il importe a l'État de connoitre la meſure de la fecondité réelle de ſa population.

3) *Rapport entre le nombre annuel des naiſſances & celui de tous les vivans.*

Ce rapport qui eſt l'effet combiné des deux précedents, & qui indique, ſur combien de vivans on peut compter une naiſſance par an, eſt la meſure de la *fecondité générale.* Elle depend des deux autres & par là elle eſt ſubordonnée à des cauſes phyſiques, morales & civiles, dont il n'y a pas moyen d'apprecier généralement l'intenſité & l'effet; c'eſt pourquoi l'Arithmetique politique ne peut point calculer avec aſſés de preciſion le nombre de tous les vivans par celui des naiſſances annuelles. Mais quoique les nombres annuels des naiſſances ne ſuffiſent pas pour trouver le nombre *abſolû* des vivans, parmi les quels

quels elles ont eû lieu; cependant ces nombres fixés par une determination moyenne entre les réſultats de pluſieurs années, ſont connoitre avec bien de la preciſion les *rapports* des nombres des vivans en divers endroits, ou d'un même endroit en temps differens, pourvû qu'il n'y ait pas d'ailleurs une trop grande diſparité des endroits, ou que les circonſtances d'un même endroit n'ayent pas changé trop conſidérablement. C'eſt ſous ces conditions, qu'on peut ſuppoſer avec beaucoup de probabilité, que les populations de divers endroits ou d'un meme endroit en temps differens, ſont dans le rapport des nombres moyens des naiſſances annuelles. Or ſans doute il intereſſe très fort le Governement de connoitre ces paralleles de la population de divers endroits, ou d'un meme endroit en temps differens, ſoit pour s'aſſurer, ſi dans chaque endroit la population eſt en juſte rapport avec ſon étendûe & ſa fertilité, ſoit pour en réchercher les cauſes, afin de ſeconder & de favoriſer celles qui en accelerent les progrès, & d'en prevenir ou écarter d'autres qui les rallentiſſent.

II. Meſure de la Mortalité.

1) *Rapport entre le nombre annuel des morts & celui de tous les vivans.*

Ce rapport qui fait voir, de combien de vivans il en meurt un par an, eſt la meſure de la *mortalité génerale.* Il eſt du plus grand interêt de l'État d'en être informé de temps en temps à l'egard de ſes ſujets, vûque cette meſure, qui rallentit immediatément les progrès de la multiplication, eſt très différente en des endroits differens & change beaucoup en un même endroit en temps

 diffe-

differens, & que, comme beaucoup d'hommes meurent par la faute des hommes & par la leur, il eſt certainement au pouvoir du Gouvernement de mettre des entraves aux cauſes qui augmentent la mortalité, de favoriſer tout ce qui la diminue, & de contribuer par des établiſſemens ſalutaires à la conſervation des citoyens, & aux progrès de la population. Le calcul nous apprend, qu'un päis qui ne doubleroit ſa population qu'après un ſiecle, ſi la meſure de ſa mortalité generale eſt $\frac{1}{30}$, c'eſt à dire, ſi ſur 30 hommes il en meurt un par an, y parviendroit en moins de la moitié de ce temps, ſi on réuſſiſſoit à reduire cette meſure jusqu'à $\frac{1}{36}$. La loi de la mortalité generale, preſcrite par la Nature au genre humain, etant modifiée par nombre de cauſes particulieres de differente eſpece, dont on ne ſçauroit tenir compte en géneral; on ne peut non plus calculer avec aſſés de preciſion le nombre des vivans par celui des morts annuels; mais ces nombres moyens ſervent cependant à connoitre aſſés exactément les paralleles des populations en divers endroits analogues, ou d'un meme endroit en temps differens, à moins qu'il n'y fût arrivé d'ailleurs des changemens trop ſenſibles. Cette meſure, incertaine ſur tout pour des grandes villes, l'eſt cependant bien moins pour des provinces entieres, les éffets des circonſtances particulieres y étant abſorbés & devenûs inſenſibles dans la multitude des evenemens, arrivés à une maſſe nombreuſe d'hommes.

2) *Rapport entre le nombre total des morts & celui des morts de chaque âge.*

Ce rapport qui indique, dans quelle proportion le nombre total des morts eſt diſtribué ſur les differens âges

âges de la vie, eſt la meſure de la *mortalité ſpecielle de chaque âge.* On rencontre une difference trés rémarquable dans cette meſure pour l'un & l'autre ſexe, ainſi que pour les habitans des villes & ceux des campagnes, où l'ordre de la Nature eſt ſuppoſé être moins derangé par des circonſtances particulieres. Il eſt d'une grande importance pour l'État, de connoitre la meſure de la mortalité ſpecielle des âges de ſes ſujets, parcequ'en la comparant avec l'ordre de la Nature, il decouvre les derangemens & les deſordres qui s'y gliſſent par des circonſtances particulieres & variables, & ſe met à portée d'en réchercher les cauſes, & d'y apporter les remédes. Ce qui ſous ce point de vùe merite la plus grande attention du Gouvernement, c'eſt la mortalité des enfans nouveaux nés, & celle des âges moyens qui ſelon l'ordre naturel devroient être les plus vigoureux & deployer en raiſon de la force de l'ame & du corps le plus d'activité pour le bien de l'État & la proſperité publique. Outre cela cette meſure de la mortalité ſpecielle des âges entre dans pluſieurs calculs politiques qui intereſſent l'État, & donne à connoitre, ſuivant quelle progreſſion s'éteint un nombre quelconque donné d'enfans nouveaux nés ou d'hommes d'un même âge quelconque; connoiſſance, ſans la quelle il n'y a pas moyen de faire des établiſſemens ſolides de Rentes viageres, des Tontines, des Caiſſes en faveur des Veuves &c. Auſſi cette même meſure ſert elle de baſe au calcul de probabilité ſur pluſieurs queſtions, dont la ſolution depend de la durée moyenne de la vie d'un homme d'un âge donné, & qui peuvent ſe préſenter, ſoit par cet interêt naturel qu'il prend à la durée de ſa vie, ſoit par quelque vûe d'un avantage public ou particulier.

 3) *Rap-*

3) *Rapport entre le nombre de tous les morts & celui des morts d'une même maladie.*

Ce rapport qui nous apprend, en quelle proportion chacune des maladies, conſignées dans les tables, a contribué à la mortalité générale, eſt la meſure du degré de la *ſanté publique* & de la *force des maladies.* On obſerve une différence conſiderable & qui fournit des réflexions intereſſantes, ſur cette meſure entre l'un & l'autre ſéxe & entre les habitants des villes & ceux de la campagne, où quelques maladies ſont bien plus de ravages que dans les villes, au lieu que le contraire arrive par rapport à pluſieurs autres. Il intereſſe très fort l'État de connoitre cette meſure pour tous ſes ſujets en général & pour les endroits principaux en particulier. Comparées avec ce que de nos jours on doit prendre pour l'ordre de la Nature dans la force des maladies de la raçe actuelle du genre humain, ces meſures en decelent les excès qui le transgreſſent, & qui produits par des circonſtances changeantes pourroient être diminués ou ſupprimés, & qu'on risque cependant de méconnoitre, faute de point de comparaiſon avec le moindre mal poſſible. C'eſt ainſi, qu'elles mettent le Gouvernement ſur la voye, ſoit de ſurprendre les contagions dans leur naiſſance & d'en étouffer le prémier germe, ſoit de récherchér & de proteger les cauſes profitables qui avoient produit des diminutions ſenſibles de la force des maladies. Comparées entre elles memes, ces meſures font connoitre non ſeulement les maladies qui portant le plus d'atteinte à la population, demandent plus de recherches & de ſoins de la part des Colleges de Santé; mais elles deſignent auſſi les endroits qui,

qui ſouffrant d'avantage de pareilles maladies, ont plus beſoin de la main ſecourable du Gouvernement; c'eſt en quoi le genre des maladies, le ſexe & l'âge des morts & la ſaiſon des grandes mortalités ſont autant d'avis qui le guident pour rémonter à leurs ſources, pour en aprofondir les cauſes ſouvent les moins ſoupçonnées, & pour faire le choix des arrangemens, ainſi que celui des endroits, d'où les établiſſemens ſalutaires puiſſent avoir l'influence la plus repandûe. C'eſt ainſi, qu'en prevénant les maladies, un Gouvernement éclairé agit ſur la conſervation de la vie des citoyens plus energiquement que la medécine même en les guériſant.

Les malheurs conſignés dans les tables, les corps trouvés morts, les noyés, les enfans étouffés dans le ſommeil par les meres ou les nourrices, les meres mortes dans les douleurs de l'enfantement faute du ſecours ou de l'habileté de la ſage-femme, ne méritent pas moins l'attention du Gouvernement & lui fourniſſent autant d'occaſions precieuſes de devenir par des établiſſemens ſalutaires le conſervateur de la vie d'un grand nombre de citoyens.

III. Meſure des progrès de la population.

Rapport entre le nombre annuel des naiſſances & celui des morts.

Ce rapport qui reſulte immediatement des meſures de la fecondité & de la mortalité, eſt la meſure des *progrès de la population*, qui proviennent de l'état interieur d'un peuple, & qu'on peut nommer *naturels* & *ſpontanés*, pour les diſtinguer de ceux qu'on obtient par des

des établiſſemens des Colonies. Le rapport de la différence du nombre annuel des nés & des morts à celui de tous les vivans ſert à calculer le temps qu'il faut pour que la population ſoit doublée ou accrûe dans quelque autre rapport quelconque; & ce temps étant l'éxpreſſion la plus propre & la plus claire de la viteſſe ou de la lenteur des progrès de la population, fait voir d'une façon la plus convaincante, combien les progrés naturels & ſpontanés qui reſultent de l'état interieur du peuple, l'emportent ſur ceux qui ſe tirent du dehors par des établiſſemens des Colonies; il met outre cela le Gouvernement en état d'apprçier avec juſteſſe, de combien ces progrés ſont accelerés ou rallentis par des changemens qui arrivent dans la fecondité ou la mortalité générales d'un peuple, & quel eſt par conſequent le degré de l'importance des cauſes qui produiſent ces changemens *).

Je paſſe maintenant aux tables de la ville de St. Péterſbourg, pour les examiner ſelon les points de vûe, que je viens d'expoſer.

I. Table

*) Voici le calcul de ce temps: ſoit le nombre de tous les vivans $= V$; la meſure de la fecondité générale $= f$; celle de la mortalité générale $= m$. Dans le cours de la prémiere année le nombre des nés ſera $= fV$, & celui des morts $= mV$; conſequemment a la fin de la prémiere année le nombre de tous les vivans $= (1+f-m).V$. Dans le cours de la ſeconde année on aura le nombre des nés $= f(1+f-m).V$ & celui des morts $= m(1+f-m).V$; donc à la fin de la ſeconde année le nombre de tous les vivans ſera $= (1+f-m)^2.V$ & ainſi de ſuite, enſorte qu'apres x années ecoulées le nombre de tous les vivans ſera $= (1+f-m)^x.V$ Si donc x eſt le nombre d'années, apres lesquelles la population s'eſt accrûe dans le rapport $1 : a$; on aura $a = (1+f-m)^x$; d'ou l'on tire $x = \frac{\log. a}{\log. (1+f-m)}$; ou en mettant $a = 2$, le nombre d'années, qu'il faut pour doubler la Population, ſera $= \frac{\log. 2}{\log. (1+f-m)}$.

I. Table generale des nombres annuels des mariages, des naiſſances & des morts.

	Année.	Mariages.	Naiſſan.	Morts.
a]	1764	787	4293	3673
	1765	1501	5136	4357
	1766	1544	5295	5349
b]	1767	1103	4371	4361
	1768	1224	4883	3721
	1769	1300	5378	4512
	1770	1187	4919	5444
	1771	1143	4781	4975
	1772	1205	4759	4910
	1773	1165	5483	5168
	1774	1372	5437	4631
c]	1775	991	4969	3636
	1776	1267	5397	4498
	1777	1332	5864	4442
	1778	1347	5481	4016
	1779	1251	5909	4313
	1780	1320	5539	4287
d]	6150 Jours	21039	87894	76293

a] Les tables de l'année 1764 ne ſont, que de 10 mois; ſçavoir depuis le 1 de Mars jusqu'a la fin de l'année.

b] L'an 1767 la Cour Imperiale étoit à Moscou. Elle partit de St Petersbourg le 21 de Février & y revint le 23 de Janvier l'an 1768.

c] L'an 1775 la Cour Imperiale étoit à Moscou. Elle quitta St. Petersbourg le 8 de Janvier & y fut de retour le 26 de Decembre.

d] Dans les deux premieres années les tables diſtinguent les Ruſſes & les Etrangers de St. Petersbourg; mais enſuite elles les comprennent tous indiſtinctement dans les memes ſommes. Les nombres conſignés içi pour les deux premieres années ſont auſſi les ſommes generales. On en trouvera apart les nombres ſpeciels pour les Etrangers dans la table XIII. & les ſuiv.

II. Table ſpecielle des nombres annuels des mariages.

	Année.	A.	B.	C.	D.	Somme.	
*]	1764	493	66	154	74	787	Dix mois.
	1765	961	126	259	155	1501	
	1766	1017	117	238	172	1544	
*]	1767	680	89	212	122	1103	La Cour Imp. abſente.
	1768	824	90	185	125	1224	
	1769	927	94	176	103	1300	
	1770	804	102	175	106	1187	
	1771	771	96	170	106	1143	
	1772	803	122	171	109	1205	
	1773	782	79	193	111	1165	
	1774	932	108	214	118	1372	
*]	1775	535	162	138	156	991	La Cour Imp. abſente.
	1776	825	104	221	117	1267	
	1777	914	106	185	127	1332	
	1778	963	116	165	103	1347	
	1779	892	97	168	94	1251	
	1780	957	109	163	91	1320	
	6150 Jours	14080	1783	3187	1989	21039	

A. Mariages entre des Garçons & des Filles.
B. Mariages entre des Veufs & des Filles.
C. Mariages entre des Garçons & des Veuves.
D. Mariages entre des Veufs & des Veuves.

III.

III. Table ſpecielle des nombres annuels des naiſſances.

	Année	Garçons.	Filles.	Somme.	Dans ce nombre il y a des Enfans venûs morts au monde. Garçons.	Filles.	Somme.	
*]	1764	2193	2100	4293	46	28	74	Dix mois.
	1765	2583	2553	5136	37	30	67	
	1766	2652	2643	5295	36	11	47	
*]	1767	2185	2186	4371	20	7	27	La Cour Imp. abſente.
	1768	2501	2382	4883	24	11	35	
	1769	2713	2665	5378	27	15	42	
	1770	2511	2408	4919	35	16	51	
	1771	2459	2322	4781	24	9	33	
	1772	2397	2362	4759	25	15	40	
	1773	2860	2623	5483	22	14	36	
	1774	2839	2598	5437	21	9	30	
*]	1775	2576	2393	4969	27	17	44	La Cour Imp. abſente.
	1776	2816	2581	5397	12	5	17	
	1777	2971	2893	5864	14	5	19	
	1778	2876	2605	5481	20	7	27	
	1779	2980	2929	5909	15	6	21	
	1780	2846	2693	5539	11	2	13	
	6150J.	44958	42936	87894	416	207	623	

Sous le titre des Enfans venûs morts au monde les tables comprennent auſſi ceux qui ſont morts avant le baptême.

IV. Table ſpecielle des nombres annuels des morts.

					Dans ce nombre il y a des corps trouvés morts.			
	Année.	Males.	Femell.	Somme.	Males.	Femell.	Somme.	
*]	1764	2296	1377	3673	52	10	62	Dix mois.
	1765	2706	1651	4357	78	28	106	
	1766	3460	1889	5349	82	14	96	
*]	1767	2724	1637	4361				La Cour Imp. abſente.
	1768	2301	1420	3721	77	25	102	
	1769	2837	1675	4512	67	16	83	
	1770	3877	1567	5444	69	13	82	
	1771	3296	1679	4975	99	28	127	
	1772	3104	1806	4910	121	22	143	
	1773	3548	1620	5168	88	13	101	
	1774	3027	1604	4631	99	29	128	
*]	1775	2114	1522	3636	68	17	85	La Cour Imp. abſente.
	1776	2705	1793	4498	94	19	113	
	1777	2859	1583	4442	162	53	215	
	1778	2634	1382	4016	125	17	142	
	1779	2798	1515	4313	128	25	153	
	1780	2764	1523	4287	103	15	118	
	6150J.	49050	27243	76293	1512	344	1856	

Dans ces nombres des morts ſont auſſi compris les enfans venus morts au monde ou morts avant le baptême, conſignés dans la table precedente.

V.

1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
21	27	12	14	20	15	11	416
652	415	638	515	507	579	501	10722
109	170	120	133	145	137	170	2061
91	111	116	58	49	52	53	1412
65	74	91	58	57	52	51	1185
71	62	85	54	39	57	48	1019
40	64	53	34	32	42	36	669
111	76	71	58	75	113	76	364
531	162	164	203	181	235	188	14752
181	114	231	225	269	272	267	3751
315	140	150	290	250	171	234	4412
131	91	149	173	178	190	229	2852
126	130	142	208	143	141	132	2923
108	80	148	117	145	149	151	2401
87	74	110	156	114	132	138	1970
64	39	78	86	85	82	81	1503
71	54	79	104	76	108	93	1320
59	42	57	66	42	48	62	958
41	46	61	70	58	37	61	803
25	45	35	38	21	26	31	496
21	21	16	19	17	18	28	330
5	9	2	8	3	5	11	109
0	0	1	6	2	7	4	54
2	0	0	3	2	2	2	38
1	0	2	1	0	0	1	18
2928	2046	2611	2697	2509	2670	2661	47538

VI.

V. Table ſpecielle des morts du ſexe masculin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Enfans venûs morts au monde.	46	37	36	20	24	27	35	24	25	22	21	27	12	14	20	15	11	416
Entre 0 — 1 an.	579	633	744	687	638	790	703	717	724	700	652	415	638	515	507	579	501	10722
1 — 2	152	159	157	128	59	77	74	63	88	120	109	170	120	133	145	137	170	2061
2 — 3	50	71	83	81	64	112	93	111	135	82	91	111	116	58	49	52	53	1412
3 — 5	34	67	92	73	52	107	90	69	94	59	65	74	91	58	57	52	51	1185
5 — 10	32	51	77	50	51	60	66	67	85	64	71	62	85	54	39	57	48	1019
10 — 15	26	28	41	44	16	26	52	48	45	42	40	64	53	34	32	42	36	669
15 — 20	69	93	71	59	47	67	91	82	117	97	111	76	71	58	75	113	76	364
20 — 25	142	158	216	155	92	188	815	454	242	626	531	162	164	203	181	235	188	14752
25 — 30	180	215	264	139	134	217	197	278	250	318	181	114	231	225	269	272	267	3751
30 — 35	178	189	281	234	164	172	674	353	231	386	315	140	150	290	250	171	234	4412
35 — 40	167	188	237	173	156	172	120	142	169	187	131	91	149	173	178	190	229	2852
40 — 45	142	198	232	238	157	178	253	183	157	163	126	130	142	208	143	141	132	2923
45 — 50	103	147	264	127	142	142	119	167	150	142	108	80	148	117	145	149	151	2401
50 — 55	84	92	154	159	115	123	117	108	89	118	87	74	110	156	114	132	138	1970
55 — 60	59	82	155	85	112	103	88	103	112	89	64	39	78	86	85	82	81	1503
60 — 65	72	63	67	100	59	66	94	68	68	78	71	54	79	104	76	108	93	1320
65 — 70	42	69	67	48	56	52	60	61	67	60	59	42	57	66	42	48	62	958
70 — 75	24	42	39	76	37	36	31	50	51	43	41	46	61	70	58	37	61	803
75 — 80	27	10	40	22	26	35	17	26	43	29	25	45	35	38	21	26	31	496
80 — 85	19	17	36	19	15	18	10	7	21	28	21	21	16	19	17	18	28	330
85 — 90	9	9	8	4	7	5	4	8	10	2	5	9	2	8	3	5	11	109
90 — 95	2	4	9	1	0	1	2	4	7	4	0	0	1	6	2	7	4	54
95 — 100	3	5	5	2	0	6	2	3	1	1	2	0	0	3	2	2	2	38
deſſûs 100	3	1	3	0	1	1	1	1	2	0	1	0	2	1	0	0	1	18
Somme.	2244	2628	3378	2724	2224	2770	3808	3197	2983	3460	2928	2046	2611	2697	2509	2670	2661	47538

6	1777	1778	1779	1780	Somme.
5	5	7	6	2	207
7	429	473	500	504	9870
3	105	91	79	96	1620
1	72	39	45	46	1224
2	69	45	64	71	1135
9	34	30	43	36	725
1	26	21	24	15	421
2	24	42	46	43	671
0	65	36	63	42	973
3	62	68	69	88	1195
0	57	62	64	44	1107
6	59	69	71	69	1118
6	88	58	59	56	949
9	62	43	55	56	834
8	72	55	53	62	843
9	56	55	60	45	719
5	70	49	56	62	803
3	41	41	37	40	687
2	50	35	48	66	791
8	33	22	17	23	451
3	33	17	19	31	335
7	10	3	4	7	113
4	6	2	5	2	58
0	0	1	1	2	29
1	1	1	2	0	21
4	1530	1365	1490	1508	26899

VII.

VI. Table ſpecielle des morts du ſexe feminin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Enfans venûs morts au monde.	28	30	11	7	11	15	16	9	15	14	9	17	5	5	7	6	2	207
Entre 0 — 1 an.	550	635	769	642	593	741	625	650	694	613	559	346	547	429	473	500	504	9870
1 — 2	91	123	111	108	47	72	68	81	83	86	114	142	123	105	91	79	96	1620
2 — 3	26	53	87	74	43	89	72	87	128	98	79	85	101	72	39	45	46	1224
3 — 5	42	73	74	52	49	82	69	64	103	44	52	60	122	69	45	64	71	1135
5 — 10	13	32	47	28	25	44	53	39	71	41	48	62	79	34	30	43	36	725
10 — 15	19	22	35	26	16	14	28	23	35	25	23	48	21	26	21	24	15	421
15 — 20	42	37	36	42	23	40	41	44	35	36	35	73	32	24	42	46	43	671
20 — 25	43	44	71	63	40	38	69	72	55	73	56	93	50	65	36	63	42	973
25 — 30	66	75	78	62	57	59	63	78	65	78	81	73	73	62	68	69	88	1195
30 — 35	61	64	64	83	50	57	63	73	74	62	72	77	80	57	62	64	44	1107
35 — 40	70	46	76	68	64	76	75	61	50	60	67	71	66	59	69	71	69	1118
40 — 45	45	49	61	65	53	46	48	63	41	38	56	57	66	88	58	59	56	949
45 — 50	32	42	47	52	45	51	49	50	50	63	42	46	49	62	43	55	56	834
50 — 55	28	40	49	53	38	35	36	47	39	50	59	48	78	72	55	53	62	843
55 — 60	38	41	51	36	36	37	32	26	44	33	42	38	49	56	55	60	45	719
60 — 65	26	52	41	34	54	41	39	47	44	44	41	38	65	70	49	56	62	803
65 — 70	45	47	52	42	36	31	34	40	43	37	45	43	33	41	41	37	40	687
70 — 75	28	40	45	46	51	46	36	40	46	53	42	47	62	50	35	48	66	791
75 — 80	40	38	23	33	38	22	21	29	32	16	22	24	18	33	22	17	23	451
80 — 85	13	17	25	9	15	13	8	16	23	29	21	13	33	33	17	19	31	335
85 — 90	9	11	12	8	5	4	7	7	7	4	4	4	7	10	3	4	7	113
90 — 95	7	6	2	2	3	3	1	2	3	5	5	0	4	6	2	5	2	58
95 — 100	4	2	5	1	3	3	1	0	3	2	1	0	0	0	1	1	2	29
deſſûs 100	1	4	3	1	0	0	0	3	1	3	0	0	1	1	1	2	0	21
Somme.	1367	1623	1875	1637	1395	1659	1554	1651	1784	1607	1575	1505	1774	1530	1365	1490	1508	26899

VII. Table reduite des morts rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en general il y a
Enfans venûs morts au monde.	8, 75	7, 69	8, 37
Entre 0 — 1 an.	225, 55	366, 93	276, 66
1 — 2	43, 35	60, 22	49, 45
2 — 3	29, 70	45, 50	35, 41
3 — 5	24, 93	42, 19	31, 17
5 — 10	21, 43	26, 95	23, 43
10 — 15	14, 07	15, 65	14, 64
15 — 20	28, 69	24, 95	27, 34
20 — 25	99, 96	36, 17	76, 91
25 — 30	78, 90	44, 43	66, 44
30 — 35	92, 81	41, 15	74, 14
35 — 40	59, 99	41, 56	53, 33
40 — 45	61, 49	35, 28	52, 02
45 — 50	50, 51	31, 00	43, 46
50 — 55	41, 44	31, 34	37, 79
55 — 60	31, 62	26, 73	29, 85
60 — 65	27, 77	29, 85	28, 52
65 — 70	20, 15	25, 54	22, 10
70 — 75	16, 89	29, 41	21, 41
75 — 80	10, 43	16, 77	12, 72
80 — 85	6, 94	12, 45	8, 93
85 — 90	2, 39	4, 20	2, 98
90 — 95	1, 14	2, 16	1, 50
95 — 100	0, 80	1, 08	0, 90
deſſûs 100	0, 30	0, 80	0, 52

VIII. Table de la Vitalité des âges des hommes à St. Petersbourg,

telle, qu'elle ſert aux calculs des Rentes viagerês & d'autres Etabliſſements de ce genre.

	De 1000 Garçons nouveaux nés.	De 1000 Filles nouvellemeut nées.	De 1000 Enfans nouveaux nés en general.
Viennent vivans au monde	991, 25	992, 31	991, 63
Accompliſſent la 1. année	765, 70	625, 38	714, 97
2	722, 35	565, 16	665, 52
3	692, 65	519, 66	630, 11
5	667, 72	477, 47	598, 94
10	646, 29	450, 52	575, 51
15	632, 22	434, 87	560, 87
20	603, 53	409, 92	533, 53
25	503, 57	373, 75	456, 62
30	424, 67	329, 32	390, 18
35	331, 86	288, 17	316, 04
40	271, 87	246, 61	262, 71
45	210, 38	211, 33	210. 69
50	159, 87	180, 33	167, 23
55	118, 43	148, 99	129. 44
60	86, 81	122, 26	99, 59
65	59, 04	92, 41	71, 07
70	38, 98	66, 87	48, 97
75	22, 00	37, 46	27, 56
80	11, 57	20, 69	18, 84
85	4, 63	8, 24	5, 91
90	2, 24	4, 04	2, 93
95	1, 10	1, 88	1, 43
100	0, 30	0, 80	0, 52

es

774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
756	666	672	663	700	727	729	12458
924	361	632	849	889	886	954	13489
438	327	447	437	392	472	398	7356
115	96	96	96	93	118	120	2030
54	102	69	90	59	69	96	1383
312	51	127	139	83	100	89	2432
31	84	255	62	5	7	2	1378
119	114	128	107	84	62	82	1858
27	39	24	62	55	83	40	630
30	64	30	31	19	51	67	466
9	0	9	28	12	8	28	640
16	1	15	10	20	25	9	303
7	0	10	22	15	15	0	191
7	43	3	2	0	1	0	202
3	8	2	1	0	0	0	88
2	0	4	5	9	2	4	97
3	0	2	2	2	1	1	32
0	0	0	0	0	1	0	10
0	0	1	2	1	0	0	11
0	0	0	0	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	0	1
54	63	73	75	51	27	30	2059
07	2019	2599	2683	2489	2655	2649	47122

X.

IX. Table ſpecielle des morts du ſexe maſculin rangés ſelon les maladies, ou les cauſes de mort.

Maladies & cauſes d. mort.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Pleureſie (колотье) - - -	561	693	844	809	678	790	833	783	734	820	756	666	672	663	700	727	729	12458
Fievre chaude - - - - -	490	629	803	618	467	717	1438	982	710	1140	924	361	632	849	889	886	954	13489
Conſomption (Phtiſie, чахотка) -	353	420	515	418	362	373	459	500	494	551	438	327	447	437	392	472	398	7356
Convulſions (родимецъ) - - -	127	132	129	135	117	119	126	160	129	122	115	96	96	96	93	118	120	2030
Vieilleſſe - - - - - -	76	75	126	104	77	103	73	57	87	66	54	102	69	90	59	69	96	1383
Dyſſenterie - - - - - -	56	74	112	86	81	144	320	171	158	329	312	51	127	139	83	100	89	2432
Petite verole - - - - -	6	61	95	73	54	170	63	115	258	37	31	84	255	62	5	7	2	1378
Hydropiſie - - - - - -	110	79	149	122	107	96	138	105	133	123	119	114	128	107	84	62	82	1858
Malheur - - - - - -	36	31	24	95	19	20	22	18	14	21	27	39	24	62	55	83	40	630
Apoplexie - - - - - -	23	17	16	24	21	12	10	13	17	21	30	64	30	31	19	51	67	466
Scorbut - - - - - - -	17	12	186	17	41	53	66	62	69	23	9	0	9	28	12	8	28	640
Dentition - - - - - -	24	37	24	12	39	15	27	8	6	15	16	1	15	10	20	25	9	303
Epilepſie - - - - - -	4	16	27	12	10	7	8	10	19	9	7	0	10	22	15	15	0	191
Verole - - - - - - -	14	29	21	13	30	10	11	5	2	11	7	43	3	2	0	1	0	202
Rougeole - - - - - -	7	12	9	16	7	11	6	0	4	2	3	8	2	1	0	0	0	88
Eſquinancie - - - - - -	18	2	7	2	18	4	2	13	1	4	2	0	4	5	9	2	4	97
Phreneſie - - - - - - -	5	1	0	2	1	6	1	2	3	0	3	0	2	2	2	1	1	32
Etouffem. des enfans au ſommeil par les meres	1	2	1	0	0	1	2	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	10
Yvrognerie - - - - - -	1	3	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	2	1	0	0	11
Fievre - - - - - - -	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
Pierre - - - - - - -	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Maladies inconnûes - - - -	260	266	253	146	71	92	167	169	119	142	54	63	73	75	51	27	30	2059
	2198	2591	3342	2704	2200	2743	3773	3173	2958	3438	2907	2019	2599	2683	2489	2655	2649	47122

1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
646	537	524	504	548	585	619	10283
201	184	245	291	223	246	257	3539
288	243	296	255	243	249	247	3957
93	69	77	83	84	87	100	1658
89	109	91	104	70	86	104	1617
26	26	46	33	25	33	14	490
33	61	298	63	5	1	1	1451
63	59	59	41	56	50	47	824
9	39	7	28	20	30	13	245
16	28	22	18	15	19	29	276
2	0	1	3	1	2	1	67
40	48	46	43	23	27	29	587
22	2	15	16	13	25	8	254
3	0	3	3	9	11	0	99
0	22	6	2	0	0	0	43
1	9	1	0	0	0	1	81
2	0	1	4	0	5	6	47
2	0	0	2	1	0	2	15
0	0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	3
30	52	31	32	22	28	29	1148
1566	1488	1769	1525	1358	1484	1507	26692

XI. Ta-

X. Table ſpecielle des morts du ſexe feminin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de mort.

Maladies & cauſes de mort.	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	Somme.
Pleureſie (колотье) - - - -	473	610	744	660	581	664	627	653	611	697	646	537	524	504	548	585	619	10283
Fievre chaude - - - - - - -	151	168	222	201	165	158	215	207	184	221	201	184	245	291	223	246	257	3539
Conſomption (Phtiſie, чахотка) -	179	193	224	222	178	236	192	211	250	251	288	243	296	255	243	249	247	3957
Convulſions (родимецъ) - - -	97	104	109	120	88	92	83	151	128	93	93	69	77	83	84	87	100	1658
Vieilleſſe - - - - - - -	107	122	123	92	117	99	78	72	83	71	89	109	91	104	70	86	104	1617
Dyſſenterie - - - - - - - -	16	19	30	35	32	26	22	27	34	46	26	26	46	33	25	33	14	490
Petite verole - - - - - - -	11	73	114	56	37	185	84	91	298	40	33	61	298	63	5	1	1	1451
Hydropiſie - - - - - - - -	47	44	52	38	41	36	50	44	55	42	63	59	59	41	56	50	47	824
Malheur - - - - - - -	5	14	3	27	4	6	7	15	10	8	9	39	7	28	20	30	13	245
Apoplexie - - - - - - - -	13	19	18	7	7	13	13	13	10	16	16	28	22	18	15	19	29	276
Scorbut - - - - - - -	4	2	7	8	23	2	1	3	4	3	2	0	1	3	1	2	1	67
Enfantement (въ родахъ) - - -	48	27	30	25	21	20	40	47	33	40	40	48	46	43	23	27	29	587
Dentition - - - - - - - -	20	13	18	16	13	17	15	19	11	11	22	2	15	16	13	25	8	254
Epilepſie - - - -	5	4	14	5	9	8	5	12	6	2	3	0	3	3	9	11	0	99
Verole - - - - - - -	2	1	1	0	0	1	0	5	2	1	0	22	6	2	0	0	0	43
Rougeole - - - - - - -	10	3	5	9	13	13	12	0	4	0	1	9	1	0	0	0	1	81
Esquinancie - - - - - - -	10	4	1	3	3	2	2	2	0	2	2	0	1	4	0	5	6	47
Phreneſie - - - - - -	2	0	1	4	0	0	1	0	0	0	2	0	0	2	1	0	2	15
Etouffem. des enfans au ſommeil par les meres	0	4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
Yvrognerie - - - - - -	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
Pierre - - - - - -	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
Maladies inconnûes - - - -	135	169	147	102	52	66	90	70	46	48	30	52	31	32	22	28	29	1148
	1339	1593	1864	1630	1384	1644	1538	1642	1769	1593	1566	1488	1769	1525	1358	1484	1507	26692

XI. Table reduite des morts rangés ſelon les maladies ou les cauſes de mort.

Maladies & cauſes de mort.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en general il y a
Pleureſie	264, 37	385, 24	308, 09
Fievre chaude	286, 25	132, 59	230, 69
Conſomption (Phtiſie)	156, 11	148, 25	153, 26
Convulſions	43, 08	62, 12	49, 96
Vieilleſſe	29, 35	60, 58	40, 64
Dyſſenterie	51, 61	18, 36	39. 59
Petite Verole	29, 24	54, 36	38, 33
Hydropiſie	39, 43	30, 87	36, 33
Malheur	13, 37	9, 18	11, 85
Apoplexie	9, 89	10, 34	10, 05
Scorbut	13, 59	2, 51	9, 58
Enfantement		21, 99	7, 95
Dentition	6, 43	9, 51	7, 54
Epilepſie	4, 06	3, 71	3. 92
Verole	4, 29	1, 62	3, 32
Rougeole	1, 87	3, 03	2, 29
Eſquinancie	2, 06	1, 76	1, 95
Phreneſie	0, 68	0, 56	0, 64
Etouffem. des enfans au ſommeil par les meres	0, 21	0, 22	0, 22
Yvrognerie	0, 23	0, 07	0, 18
Fievre	0, 17	0, 00	0, 11
Pierre	0, 02	0, 11	0, 05
Maladies inconnûes	43, 69	43, 02	43, 45

XII. Table des morts rangés ſelon les Mois.

	Males.	Femell.	Somme.		Males.	Femell.	Somme.
Janvier	3503	2105	5608	Juillet	4089	2380	6469
Fevrier	3481	2020	5501	Aout	3686	2532	6218
Mars	4238	2289	6527	Septemb.	3344	2148	5492
Avril	4985	2403	7388	Octobre	3177	1955	5132
Mai	5559	2425	7984	Novemb.	3157	2025	5182
Juin	4587	2383	6970	Decemb.	3316	2027	5343

Dans ces nombres les Enfans venûs morts, & les corps trouvés morts ne ſont pas compris.

	Le plus grand nombre des morts.				Le plus petit nombre des morts.			
	Males.		Femelles.		Males.		Femelles.	
1764	Mai	344	Mài	156	Octobre	167	Mars } Octobr. }	119
1765	Avril	263	Janvier	177	Octobre	157	Juin } Aout }	111
1766	Mai	454	Mài	200	Novembre	207	Octobre	116
1767	Mai	331	Mai	160	Novembre	127	Octobre	83
1768	Mai	225	Juin	148	Novembre	141	Octobre	75
1769	Mai	362	Mai	167	Novembre	146	Fevrier } Nov. }	111
1770	Mai	509	Mars	170	Octobre	209	Decembre	91
1771	Mai	351	Novemb.	162	Octobre	212	Janvier	101
1772	Mai	370	Mai	186	Octobre	148	Decembre	87
1773	Mai	375	Aout	193	Fevrier	216	Fevrier	99
1774	Mai	348	Juill.	148	Octobre	168	Fevrier } Decemb. }	116
1775	Mai	212	Juin } Aout }	148	Septembre	129	Mars	93
1776	Juin	260	Aout	205	Octobr. } Mars }	185	Octobre	112
1777	Mai	330	Juin	168	Novbr.	176	Octobre	93
1778	Mai	305	Mars } Aout }	133	Decembr.	139	Novembre	78
1779	Juin	276	Aout	167	Fevrier	157	Janvier } Mars }	93
1780	Mai	278	Janv.	145	Septembre	183	Octobre	97

XIII.

XIII. Table générale des mariages, des naiſſances & des morts des Etrangers à St. Pétersbourg, pour 22 Mois, depuis le 1 de Mars 1764 jusqu'à la fin de l'année 1765.

Mariages.	A. 196	B. 24	C. 38	D. 18	Somme. 276	
Naiſſances.	Males. 558	Femelles 560	Somme. 1118	au quel nombre il y a des enfans venüs morts au monde. Males. 15	Femelles 12	Somme. 27
Morts.	578	514	1092	Point de corps trouvés morts.		

Quoique cette table, & les ſuivantes, qui ſe rapportent aux habitans étrangers de la ville, ne ſont que pour 22 mois, par la raiſon alleguée cy deſſûs, & qu'à cauſe de cela on remarque dans les tables XIV & XV. quelques irregularités, qui auroient été inſenſibles, ſi ces tables euſſent embraſſé une plus longue période: j'ai crû cependant les devoir joindre-ici, ſoit pour en tirer quelques concluſions, qui pour cela ne laiſſent pas d'etre aſſés juſtes, ſoit pour faire voir qu'il ſeroit à deſirer, que pour l'avenir on diſtinguât dans les tables de St. Pétersbourg les habitans étrangers, de la ville & les nationaux, pour étre à portée de faire le parallele de leur fecondité & de leur mortalité relatives, ce qui ne manquera pas de donner des lumieres intereſſantes.

XIV. Table ſpecielle des morts des Etrangers rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	Males.	Femelles.	Somme.
Enfans venûs morts au monde	15	12	27
Entre 0 — 1 année	154	175	329
1 — 2	71	49	120
2 — 3	21	13	34
3 — 5	18	27	45
5 — 10	19	11	30
10 — 15	16	9	25
15 — 20	16	24	40
20 — 25	22	19	41
25 — 30	20	20	40
30 — 35	24	19	43
35 — 40	24	23	47
40 — 45	47	17	64
45 — 50	24	15	39
50 — 55	20	13	33
55 — 60	16	15	31
60 — 65	19	8	27
65 — 70	18	13	31
70 — 75	6	5	11
75 — 80	5	17	22
80 — 85	3	7	10
85 — 90	0	3	3
90 — 95	0	0	0
Somme.	578	514	1092

XV. Ta-

XV. Table réduite des morts des Etrangers rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	De 1000 morts du ſexe maſc. il y a	De 1000 morts du ſexe fem. il y a.	De 1000 morts pris en général il y a
Enfans venûs morts au monde	25,95	23,35	24,73
Entre - 0 — 1 année	266,44	340,46	301,27
1 — 2	122,84	95,33	109,89
2 — 3	36,33	25,29	31,14
3 — 5	31,14	52,53	41,21
5 — 10	32,87	21,40	27,49
10 — 15	27,68	17,51	22,89
15 — 20	27,68	46,69	36,63
20 — 25	38,06	36,96	37,55
25 — 30	34,60	38,91	36,63
30 — 35	41,52	36,96	39,38
35 — 40	41,52	44,75	43,04
40 — 45	81,31	33,07	58,61
45 — 50	41,52	29,14	35,71
50 — 55	34,60	25,29	30,22
55 — 60	27,68	29,18	28 39
60 — 65	32,87	15,56	24,72
65 — 70	31,18	25,29	28,39
70 — 75	10,38	9,72	10,07
75 — 80	8,65	33,07	20,14
80 — 85	5,19	13,62	9,16
85 — 90	0,00	5,84	2,75
90 — 95	0,00	0,00	0,00

 XVI. Ta-

XVI. Table de la Vitalité des âges des Etrangers à St. Pétersbourg.

telle, qu'elle ſert aux calculs des rentes viageres & d'autres établiſſements de ce genre.

	De 1000 garçons nouveaux nés.	De 1000 filles nouvellement nées.	De 1000 Enfans nouveaux nés en général.
Viennent vivans au monde -	974, 05	976, 65	975, 28
ac ompliſſent. la 1 année.	707, 61	636, 19	674, 01
2 - - -	584, 77	540, 86	564, 12
3 - - -	548, 44	515, 57	532, 98
5 - - -	517, 30	463, 04	491, 77
10 - - -	484, 43	441, 64	464. 28
15 - - -	456, 75	424, 13	441, 39
20 - - -	429, 07	377, 44	404, 76
25 - - -	391, 01	340, 48	367, 21
30 - - -	356, 41	301, 57	330, 58
35 - - -	314, 89	264, 61	291, 20
40 - - -	273, 37	219, 86	248, 16
45 - - -	192, 06	186, 79	189, 55
50 - - -	150, 54	157, 61	153, 84
55 - - -	115, 94	132, 32	123, 62
60 - - -	88, 26	103, 14	95, 23
65 - - -	55, 39	87, 58	70, 51
70 - - -	24, 25	62, 29	42, 12
75 - - -	13, 87	52, 57	32, 05
80 - - -	5, 20	19, 50	11, 91
85 - - -	0, 00	5, 84	2, 75
90 - - -	0, 00	0, 00	0, 00

XVII. Ta-

XVII. Table réduite des morts des Etrangers à St. Pétersbourg, rangés ſelon les maladies ou les cauſes de mort.

Maladies & Cauſes de mort.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a.	De 1000 morts du ſexe feminin il y a	De 1000 morts pris en général il y a.
Pleuréſie - - - -	- - 23, 09	- - 11, 95	- - 17, 84
Fievre chaude - - -	- - 223, 80	- - 137, 45	- - 183, 10
Conſomption - - -	- - 115, 45	- - 111, 55	- - 113, 62
Convulſions - - -	- - 204, 26	- - 199, 20	- - 201, 88
Vieilleſſe - - - -	- - 14, 21	- - 33, 86	- - 23, 47
Dyſſenterie - - -	- - 14, 24	- - 21, 91	- - 17, 84
Petite verole - - -	- - 42, 63	- - 75, 70	- - 58, 22
Hydropiſie - - -	- - 33, 75	- - 33, 86	- - 33, 80
Malheur - - -	- - 10, 66	- - 13, 94	- - 12, 21
Apoplexie - - -	- - 21, 31	- - 25, 90	- - 23, 47
Scorbut - - - -	- - 0, 00	- - 5, 97	- - 2, 87
Enfantement - - -	- - - -	- - 33, 86	- - 15, 96
Dentition - - - -	- - 101, 24	- - 65, 74	- - 84, 51
Epilepſie - - - -	- - 10, 66	- - 9, 95	- - 10, 33
Verole - - - -	- - 5, 32	- - 1, 99	- - 3, 75
Rougeole - - - -	- - 21, 31	- - 11, 95	- - 16, 90
Eſquinancie - - -	- - 0, 00	- - 3, 98	- - 1, 87
Phreneſie - - -	- - 1, 77	- - 0, 00	- - 0, 94
Etouffement des nourriçons au ſommeil par les meres - - - -	- - 3, 55	- - 5, 97	- - 4, 69
Pierre - - - -	- - 0, 00	- - 3, 98	- - 1, 88
Maladies inconnûes - -	- - 152, 75	- - 191, 23	- - 170, 89

Les tables precedentes nous fourniſſent d'abord les reſultats ſuivans generaux:

I.) Etat moyen de la population à St. Petersbourg pour tout l'intervalle du temps depuis l'année 1764 jusqu'à l'année 1780. (*)

1.) Il ſe fit annuellement à St. Petersbourg 1297 mariages.

2.) Il y naquit annuellement 5292 enfans; ſçavoir 2710 garçons & 2582 filles.

3.) Il y mourût annuellement 4616. perſonnes, ſçavoir 2993 males & 1623 femelles.

4.) Conſequemment il y eût un ſurçroit annuel des naiſſances ſur les morts de 676 perſonnes; ſçavoir il y naquit 959 femelles plus, qu'il n'en mourût, & il y mourût 283 males plus, qu'il n'en naquit; enſorte que le ſurcroit des naiſſances ſur les morts etoit uniquement du côté des femmes.

Voyons, s'il en eſt de même dans les periodes ſpecielles de tout cet intervalle du temps.

II.) Etat comparé de la population à St. Petersbourg dans les trois dernieres periodes conſecutives:

Premiere periode de 1764 – 1770.

Le nombre annuel des mariages fut 1351.

Il

(*) Du calcul de ces nombres moyens j'ai exclû l'année 1764, dont les tables ne ſont que pour dix mois, & les années 1767 & 1775, à cauſe de l'abſence de la Cour Imperiale de St. Petersbourg dans ces deux années.

Il naquit annuellement 5122 enfans, ſçavoir 2592 males & 2530 femelles.

Il mourût annuellement 4677 perſonnes, ſçavoir 3036. males & 1641. femelles.

Donc le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts a été de 445 perſonnes; & ce ſurcroit eſt uniquement du côté des femmes.

Seconde periode de 1771 — 1775.

Le nombre annuel des mariages a été 1221.

Il naquit annuellement 5115 enfans; ſçavoir 2639 males & 2476 femelles.

Il mourût annuellement 4921 perſonnes; ſçavoir 3244 males & 1677 femelles.

Donc le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts a été de 194 perſonnes; & ce petit ſurcroit a été encore uniquement du côté des femmes.

Troiſieme periode de 1776 — 1780.

Le nombre annuel des mariages a été 1305.

Il naquit annuellement 5638 enfans; ſçavoir 2898 garçons & 2740 filles.

Il mourut annuellement 4311 perſonnes; ſçavoir 2752 males & 1559 femelles.

Donc le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts a été de 1327 perſonnes; & ce grand ſurcroit a outre cela l'avantage de venir & de l'un & de l'autre ſexe.

Nous aurons dans les remarques ſuivantes, l'occaſion d'obſerver encore d'autres avantages, par lesquels cette derniere periode ſe diſtingue des deux précedentes.

Je

Je paſſe maintenant aux Remarques abregées *ſur les tables précédentes de la fécond.té & de la mortalité dans la Ville de St. Pétersbourg*: & pour plus d'ordre, je les range ſous les titres ſuivans, conformement au plan donné ci devant:

I. Nombre moyen des vivans dans la ville de St. Pétersbourg pour la periode de 1764 jusqu'à 1780, & proportion entre le nombre des habitans étrangers & celui des nationaux.

Pour etre à même de faire tout l'emploi dont de pareilles tables ſont ſusceptibles, & pour en tirer toute l'utilité qu'elles promettent, il faudroit, que le nombre de tous les vivans qu'elles embraſſent, fût connu par des dénombremens exacts, faits de periode en periode, & que ce nombre entrât comme une quantité connue dans ces ſortes de calculs. En Suede, où l'on a perfectionné le plus la conſtruction & l'emploi de telles tables, le Bureau qui en eſt dépoſitaire & chargé d'en faire la redaction & le calcul, reçoit auſſi tous les trois ans des relevés detaillés de tous les vivans, ſelon leur ſexe, leur âge & leur genre de vie. Dans l'incertitude où je ſuis ſur le nombre des vivans de St. Pétersbourg dans la période dont il s'agit, voici la manière, qui m'a paru la plus ſûre pour le calculer avec un degré ſuffiſant de préciſion: Je compare le nombre de tous les vivans qu'on a trouvés à St. Pétersbonrg par le dénombrement fait en 1784, avec le nombre des naiſſances de cette même année; d'où j'obtiens la meſure de la fécondité générale $= \frac{1}{31}$, c'eſt-à-dire, qu'en l'année 1784, on comptoit à St. Pétersbourg 31 vivans ſur

ſur chaque naiſſance; & cette meſure de fecondité générale eſt parfaitement d'accord avec celle, qui a ordinairement lieu dans les grandes villes. En ſuppoſant donc, que cette même meſure de la fecondité générale $= \frac{1}{31}$ a également eu lieu à St. Petersbourg dans la periode de 1764 jusqu'à 1780, pour la quelle les tables précédentes nous apprennent le nombre moyen des naiſſances annuelles = 5292, on obtient 164052 pour le nombre moyen des vivans à St. Petersbourg dans cette même période. Ce nombre eſt le nombre moyen de la population de cette ville pour toute la durée de cette période; nous verrons dans la ſuite, que dans les dernieres cinq années de cette période, il doit être ſuppoſé probablement de 174778.

Dans les tables des deux premieres années de cette période on a eu ſoin de diſtinguer les nationaux des étrangers; ce qui nous offre le moyen de calculer avec aſſez de préciſion le rapport, qui alors eut lieu entre le nombre des habitans ètrangers de la ville & celui des nationaux. En prenant ces deux années enſemble, on trouve le nombre des mariages des étrangers être au nombre des mariages des ruſſes, comme 10 à 73;
celui des naiſſances, comme 10 à 74;
& celui des morts, comme 10 à 63.
Le rapport moyen entre ces trois eſt celui de 1. à 7; de façon, qu'on peut établir avec bien de la probabilité, qu'en 1764 & 1765 on comptoit à St. Petersbourg ſept ruſſes contre un étranger. Il s'enſuit, que le nombre moyen de la population étant ſuppoſé 164000, il y avoit alors dans ce nombre 143800 ruſſes & 20500 étrangers.

II.) Fécondité intentionnelle.

1.) Le nombre moyen annuel des mariages a été = 1297; calcul moyen de 14 ans, en excluant les deux années de l'abſence de la Cour ainſi que l'année 1764, dont les tables ne ſont que pour 10 mois. J'en tire la meſure de la fécondité intentionnelle = $\frac{1}{126}$; c'eſt à-dire, qu'entre 126 perſonnes il ſe fait un mariage par an, ou que de 63 perſonnes il y en a annuellement une, qui ſe marie. Cette meſure de la fécondité intentionnelle n'eſt que médiocre tout au plus, vû qu'il y a de grandes villes où elle eſt $\frac{1}{110}$ ou même $\frac{1}{85}$, quoiqu'il y en ait auſſi d'autres, où elle n'eſt que $\frac{1}{137}$. Il ſera intéreſſant de voir par la continuation des tables de St. Petersbourg, quels ſeront dans la ſuite les progrès de cette fécondité. La régle que j'ai expoſée ci-deſſus pour trouver le temps du doublement de la population, fait voir l'avantage ou le détriment, qui reſulte pour l'Etat ſelon que p. e. dans un Gouvernement de 500000 hommes la meſure de leur fécondité intentionnelle eſt $\frac{1}{110}$ ou $\frac{1}{126}$. D'ailleurs il eſt à préſumer, que des tables pour des provinces entiéres montreroient bien plus de fécondité intentionnelle, puisqu'à cauſe d'un plus grand nombre de célibataires, elle eſt plus petite dans les villes, que parmi les gens de la campagne. En diſtribuant les 17 années de nos tables en 3 périodes, on obtient les nombres moyens annuels des mariages

pour la période		Calcul moyen
de 1764 – 1770	1351	de 5 ans
de 1771 – 1775	1221	– 4
de 1776 – 1780	1305	– 5

d'où

d'où l'on voit, que ce nombre a été le plus grand dans la premiere periode; qu'il a baiſſé ſenſiblement dans la ſeconde, mais que dans la troiſiéme il a derechef augmenté presqu' autant.

2.) Il eſt remarquable, qu'à St. Petersbourg le nombre des veuves qui ſe remarient, eſt plus grand que celui des veufs qui paſſent à de ſecondes nôces, & cela dans le rapport de 7 à 5; aulieu que par tout ailleurs il en arrive le contraire.

3.) Il ſeroit à déſirer, que dans les tables, ſurtout lorsqu'elles ſeront dans la ſuite étendues à des Gouvernemens entiers, on marquât auſſi l'âge des perſonnes qui ſe marient. Le Gouvernement en jugeroit, ſi les mariages ſe font à l'age, qu'indique la nature ſans être ni tardifs, ni prématurés, ce, qui a dans l'un ou l'autre cas une influence bien ſenſible ſur la fécondité réelle (*). Il ſeroit bon auſſi, que dans les liſtes des morts on comptât, combien de mariages ont été diſſous par la mort de l'un ou de l'autre des mariés. On en calculeroit la durée moyenne des mariages.

(*) M. Francklin aſſure (Oeuvr. T. II. pag. 119.) que dans les Etats de l'Amérique, où la conſtitution politique & économique encourage les jeunes gens à ſe marier de bonne heure en leur offrant la perſpective d'une ſubſiſtance aiſée, on compte 8 enfans ſur chaque mariage, & que par cette raiſon, la population y double au moins tous les 20 ans.

III. Fécondité réelle.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été 5292, dans le quel il y a 2710 garçons & 2582 filles: Calcul moyen de 14 ans. D'où réſulte la meſure de la fécondité réelle pour cet eſpace de temps en général = 4, 08, c'eſt-à-dire, qu'on compoit 408 enfans ſur 100 mariages. Mais en le diviſant en 3 périodes, comme ci-deſſus, on a plus exactement pour la période:

	le nombr. moyen des naiſſ. annu.	le nombr. moyen des mariages.	donc la meſure de la fec. réelle.
de 1764 — 1770	5122	1351	3, 7
de 1771 — 1775	5115	1221	4, 1
de 1776 — 1780	5638	1305	4, 2

Dans cette dernière période de 1776 — 1780 chaque mariage, l'un compenſant l'autre, produiſoit 4, 2, c'eſt-a-dire, 10 mariages 42 enfans; ce, qui eſt une aſſez forte fécondité réelle. Dans des provinces entières elle eſt ordinairement 4, & dans les grandes villes 3, 3 jusqu'à 3, 8; il y a cependant auſſi des grandes villes, où elle eſt portée jusqu'à 4, 6. Il ſeroit bon auſſi de connoître la meſure de la fécondite réelle pour les villes de Gouvernement, les villes provinciales, les villes de cercles & les bourgades de la Ruſſie.

Il eſt digne d'attention, que la meſure de la fécondité réelle, qui depuis 1764 à 1770 n'a été, que 3, 7, eſt portée à 4, 2 dans la période ſuivante. Un Gouvernement, qui n'obtenant que 37 enfans de 10 mariages, ne doubleroit ſa population, qu'après un ſiécle,

ſiécle, y parviendroit déja après 65 ans, ſi la fécondité réelle y étoit portée au point qu'il pùt compter 42 enfans provenus de 10 mariages. Ce changement favorable ſemble annoncer des mariages moins tardifs dans cette période, que dans les précédentes.

2.) On a appris par un accord parfait de toutes les tables des naiſſances, qu'on ait eûes jusqu'à preſent, que par tout & en tout temps dans toute quantité conſiderable d'enfans, il y a plus de garçons que de filles, & que le nombre des garçons ſurpaſſe celui des filles préciſement dans le rapport de 105 : 100 ou à peu de choſe près. Cette régularité dans la naiſſance des enfans des deux ſexes eſt ſi conſtante, que ſelon le calcul de probabilité, tant-s'en-faut, qu'elle puiſſe être l'éffet du haſard, qu'elle eſt plutôt une preuve frappante que la providence préſide au ſort du genre humain. C'eſt préciſement ce même rapport, qu'indiquent auſſi les tables de St. Pétersbourg. Le nombre moyen annuel des garçons (2710) eſt à celui des filles (2582) dans le rapport de 105 à 100. Dans le nombre total des naiſſances (87894) qui ont eu lieu dans la période de 17 ans, il y a 44958 garçons & 42936 filles; ces deux nombres ſont entre eux dans le rapport de 1047 : 1000, qui ne differe pas ſenſiblement de celui de 105 : 100.

IV. Fécondité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été 5292. Calcul moyen de 14 ans. Par ce nombre nous avons calculé celui de tous les vivans, en évaluant

en conſéquence d'un dénombrement actuel & de la façon alleguée ci-deſſus, la méſure de la fécondité générale $= \frac{1}{31}$; c'eſt-à-dire, que dans la période mentionnée on comptoit à St. Pétersbourg une naiſſance par an ſur 31 vivans.

Cette meſure de la fécondité générale eſt bien d'accord avec celle, qui a le plus frequemment lieu dans les grandes villes, où elle eſt ordinairement $\frac{1}{35}$, au lieu, que dans les petites villes & les villages elle monte ſouvent jusqu'à $\frac{1}{24}$ ou même à $\frac{1}{21}$. Il eſt cependant auſſi des grandes villes, où elle va jusqu'à $\frac{1}{28}$.

2.) Il ſeroit certainement d'une grande utilité, de connoître les meſures de la fécondité générale des provinces & des Gouvernemens entiers de la Ruſſie, & de les comparer entre elles de temps en temps, ce qui ne laiſſeroit pas de fournir des rémarques bien intereſſantes. Ailleurs dans des provinces entieres elle eſt ordinairement $= \frac{1}{28}$. La différence entre ces meſures de $\frac{1}{31}$ & $\frac{1}{28}$, en produit une de presque 2000 naiſſances annuelles dans un nombre de 500000 hommes, que je prends pour la population moyenne d'un Gouvernement de Ruſſie, & l'epoque du doublement de la population en eſt rapprochée ou reculée de presqu'un ſiecle. Au reſte dans tout endroit la meſure de la fécondité réelle a des limites naturelles, aux quelles une fois parvenûe elle ceſſe d'augmenter; mais ces limites, n'étant que celles d'une ſubſiſtance aiſée libre & aſſurée, ſont aſſujetties aux ſoins du Gouvernement.

3) Si

3.) Si nous ſuppoſons, que la même meſure de la fécondité générale a eû lieu dans les 3 périodes mentionnées; il y avoit à St. Pétersbourg dans la période:

de 1764 – 1770	158782 hommes
de 1771 – 1775	158565 – –
de 1776 – 1780	174778 – –

conſéquemment dans la dernière période 16000 hommes de plus, que dans les deux précédentes, & la population s'eſt accrue d'un dixiéme. Le nombre moyen pour ces trois périodes priſes enſemble eſt 164052, comme il a été dit ci-deſſus.

4.) Les nombres moyens des naiſſances annuelles, qui nous ont ſervi à comparer la population de St. Pétersbourg à elle-meme en temps differens, ſervent auſſi à la comparer avec celle d'autres grandes villes. Il en réſulte par exemple que la population de cette ville eſt environ le tiers de celle de Londres ou de Paris, & qu'elle eſt à celle de Vienne dans le rapport de 10 à 13.

V. Mortalité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des morts a été de 4616, dans le quel il y avoit 2993 hommes & 1623 femmes. Calcul moyen de 14 ans. Tout l'intervalle de temps, que les tables embraſſent, étant diviſé, comme ci-deſſus, en 3 périodes: on a pour la période

	Nombre moyen annuel des morts.
de 1764 – 1770	4677
de 1771 – 1775	4921
de 1776 – 1780	4311

où

où il eſt a remarquer, que la période de 1771 — 1775 ſe diſtingue par le plus grand nombre moyen annuel des morts & le plus petit des mariages & des naiſſances, (pag. 40.) & qu'au contraire la période ſuivante de 1776 — 1780 eſt remarquable par le plus petit nombre moyen annuel des morts & le plus grand des naiſſances.

2.) Le nombre moyen annuel des morts, 4616, nous fournit la meſure de la mortalité générale $= \frac{1}{35}$; c'eſt-à-dire, que dans le temps mentionné, de 35 perſonnes il en mourut une par an à St. Pétersbourg, ou que de 1000 perſonnes il en mourut annuellement 28.

3.) Une ſi petite mortalité générale dans une ſi grande ville eſt peut-être ſans exemple. Ailleurs la meſure de la mortalité générale eſt ordinairement $\frac{1}{24}$ pour les plus grandes villes; $\frac{1}{28}$ pour les villes médiocres; $\frac{1}{32}$ pour les petites villes, & $\frac{1}{45}$ pour les habitans de la campagne; c'eſt-à-dire, que d'un nombre égale de 1000 vivans, les habitans de la campagne font une perte annuelle de 25; les plus grandes villes de 42; les villes médiocres de 36; les petites villes de 31; mais St. Pétersbourg n'en perd annuellement, que 28.

4.) Cette mortalité extraordinairement petite pourroit peut-être rendre ſuſpecte l'exactitude des tables ſur les relevés des morts. Mais dèsqu'on y réfléchit, le doute paroit de plus en plus être deſtitué de fondement. Nous avons trouvé ci-deſſus que la meſure de la fécondité générale,

nérale eſt $\frac{1}{31}$; étant tirée d'un denombrement actuel & parfaitement d'accord avec celle qui a ordinairement lieu dans les grandes villes, elle eſt ſolidement établie, à moins qu'on ne tienne auſſi pour ſuſpecte la préciſion du dénombrement-même. Or ſi la meſure de la mortalité générale ſurpaſſoit ou égaloit celle de la fécondité générale; il eſt évident par la regle donnée ci-deſſus, que dans le premier cas St. Pétersbourg ſe dépeupleroit annuellement, & qu'au ſecond cas, il n'y auroit, qu'une même population, permanente & qui ne feroit aucun progrès. Mais l'un & l'autre de ces deux états ſont également contredits par l'experience; les progrès de la population y étant ſenſibles par pluſieurs circonſtances. Il faut donc, que la méſure de la mortalité générale y ſoit plus petite que $\frac{1}{31}$, & puisqu'il faut qu'elle ſoit *ſenſiblement* plus petite, elle pourra bien être $\frac{1}{35}$. D'ailleurs cette petite mortalité générale s'explique par la nature robuſte & vigoureuſe des nationaux, de la quelle la meſure de la mortalité ſpecielle des âges va nous fournir dans l'article ſuivant des preuves convaincantes; & outre cela la ſalubrité-même de cette ville du Nord, bâtie ſpacieuſement, percée par des rûes larges & libres, & traverſée par un fleuve d'une fort bonne eau exclut une des cauſes principales de la grande mortalité des grandes villes.

5) Au nombre des 17 ans que les tables embraſſent, il n'y en a eu que quatre, où le nombre des naiſſances fût inférieur à celui des morts. Pour la ſomme de ces 17 années priſes enſemble, le nombre moyen an-

nuel des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts dans le rapport de 114 à 100; c'eſt-à-dire, que contre 100 perſonnes, qui moururent, il naquit 114 enfans. En diſtribuant cet intervalle de temps, comme ci-deſſus, en 3 périodes: on trouve pour la période:

	le rapport du nombre moyen annuel des naiſſances à celui des morts.
de 1764 — 1770	109 : 100
de 1771 — 1775	104 : 100
de 1776 — 1780	130 : 100

où il eſt ſatisfaiſant de voir, quel eſt l'avantage de la derniere période de 1776 — 1780 ſur les deux précédentes par rapport aux progrès de la population, ce que nous détaillerons plus amplement dans la ſuite.

6.) C'eſt une choſe digne de remarque, que le ſurcroit annuel des naiſſances ſur les morts à St. Pétersbourg pris pour tout l'intervalle de temps que les tables embraſſent, ne provienne uniquement que du ſexe féminin; car pour le *ſexe maſculin* le nombre moyen annuel des naiſſances eſt inferieur à celui des morts dans le rapport de 90 à 100, au lieu que pour les femmes le nombre moyen annuel des naiſſances ſurpaſſe celui des morts dans le rapport de 159 à 100; cependant la dernière période de 1776 à 1780 a l'avantage, comme nous l'avons vû ci-devant, de tirer ſon ſurcroit des naiſſances ſur les morts & de l'un & de l'autre ſexe.

7.) Le

7.) Le rapport des nombres moyens annuels des morts des deux ſexes nous préſente une obſervation intéresſante à faire. Le nombre moyen annuel des hommes morts eſt à celui des femmes mortes dans le rapport de 184 à 100. Ce rapport extraordinairement fort s'explique par la multitude d'hommes qui excède à St. Pétersbourg beaucoup plus qu'ailleurs, le nombre des femmes, inegalité qui cependant (rémarque 6) diminue chaque année; d'ailleurs la mortalité des hommes, qui jusqu'à la 20ième année de l'âge eſt moindre que celle des femmes, commence dès lors à la ſurpaſſer de beaucoup; enſorte qu'entre la 20ième & la 25ième année de l'âge, de 1000 hommes il en meurt 165, au lieu que de 1000 femmes de même âge il n'en meurt dans un égal intervalle que 88 (voyez l'article ſuivant ſur la méſure de la mortalité ſpecielle de chaque âge).

8.) La mortalité générale à St. Pétersbourg, quelque petite qu'elle ſoit, doit cependant naturellement ſe resſentir de l'effet de la plûpart des cauſes, qui augmentent la mortalité dans les grandes villes. Il s'enſuit néceſſairement, qu'on a lieu de s'attendre à une moindre mortalité générale dans les moindres villes de l'Empire & bien moindre encore parmi les habitans de la campagne. Il ſeroit très intéreſſant pour l'État & en général & en particulier d'en connoitre les véritables meſures, qui entrent ſi eſſentiellement dans le choix des moyens de réaliſer le degré de population que comporte la Ruſſie, & dont tout s'accorde à conſtater la poſſibilité.

VI. Mortalité ſpecielle de chaque âge.

Les tables de St. Pétersbourg nous offrent pluſiéurs rêmarques intéreſſantes à faire, ſur la meſure de la mortalité ſpecielle de chaque âge dans cette ville. Pour plus d'ordre je les range ſous les titres ſuivans:

1) *Nombre des enfans venus morts au monde.*

1.) Dans le nombre de 87894 naiſſances arrivées pendant tout l'intervalle de temps que comprennent les tables, il n'y a eu que 623 enfans de venus morts au monde, ou ce qui revient au même, il n'y en a eu que 7, ſur 1000 naiſſances; en quoi il eſt encore digne de rémarque, que ce nombre moyen, dejà ſi petit en lui-même, diminuoit encore ſenſiblement dans les periodes ſucceſſives; car le temps que les tables embraſſent, étant comme ci-deſſus diſtribué en 3 périodes, on voit, que ſur 1000 naiſſances il y a eu dans la période

	Enfans venus morts au monde.
de 1764 — 1770	10
de 1771 — 1775	7
de 1776 — 1780	3.

Nos tables font voir à cet égard une différence ſenſible dans la mortalité des deux ſexes: ſur 1000 garçons il y a eu 9 enfants morts nés, au lieu qu'il n'y en a eu que 5, ſur 1000 filles; cette proportion eſt bien d'accord avec celle qui a auſſi lieu en ce point dans d'autres endroits, ainſi qu'on le voit par exemple par les tables ſuedoiſes.

2.) Un

2.) Un ſi petit nombre d'enfans morts-nés (7 ſur 1000 naiſſances) eſt peut être ſans exemple. Voudroit on ſoupçonner la précision des tables à cet égard? leur accord avec d'autres, quant à la proportion de cette mortalité pour les deux ſexes, que je viens de faire remarquer, eſt un préjugé en leur faveur. On eſt beaucoup plus en droit d'attribuer cet avantage de la population à la forte conſtitution des nationaux, parceque les mêmes tables démontrent, que parmi les étrangers à St. Pétersbourg ſur 1000 naiſſances il y a 25 enfans morts-nés, conſéquemment plus de 3 fois autant, que parmi les Ruſſes. Ajoutons que ce qui contribue à rendre chez les Ruſſes ce malheur plus rare, c'eſt la facilité avec la quelle les meres ruſſes mettent au monde leurs enfans; car les tables font voir que de 1000 femmes ruſſes qui accouchent, il n'y a que 7 qui periſſent dans les travaux de l'enfantement; aulieu que chez les habitans étrangers de la ville ſur autant de femmes en couche 15 en ſont ordinairement les victimes.

3.) Le grand avantage qui en réſulte pour les progrès de la population, s'apprécie facilement, quand on conſidère que la Ruſſie comptant jusqu'à un million de naiſſances annuelles, jouit par cette circonſtance heureuſe d'un gain national annuel de 17000 enfans, qui ne verroient pas le jour, ſi le rapport du nombre des enfans morts-nés à celui des naiſſances, étoit chez les nationaux le même que chez les étrangers.

 2.) *Mor-*

2.) *Mortalité des enfans nouveaux-nés.*

1.) La meſure de la mortalité ſpecielle pour la première année de l'âge humain eſt à St. Pétersbourg telle, que de 1000 enfans nouveaux-nés & venus vivans au monde il en meurt 279 avant de l'accomplir, de façon que la mortalité de cet âge en enleve 5 de 18, c'eſt un peu plus du quart de la totalité des naiſſances. Cette mortalité eſt donc à la verité plus grande que celle que preſcrit le cours ordinaire de la nature, ſelon le quel de 1000 enfans il ne meurt à cet âge que 245, mais elle eſt cependant bien moindre que celle qui a lieu non ſeulement en d'autres grandes villes, mais auſſi dans St. Pétersbourg même parmi les habitans étrangers de cette ville, chez qui d'autant d'enfans nouveaux-nés il en meurt 309 pendant le cours de la première année de la vie. Les tables montrent une grande différence entre les meſures de cette mortalité de l'un à l'autre ſexe à St. Pétersbourg; car de 1000 garçons nouveaux-nés il n'en meurt dans la première année que 227, ou 10 de 44; au lieu que d'autant de filles la mortalité de cet âge en enleve 370, ou 10 de 27. Ce rapport eſt donc chez les nationaux de 5 à 8, & chez les étrangers établis à St. Pétersbourg il eſt à peu près de 5 à 6.

2.) La forte mortalité des enfans parmi les habitans de la campagne & dans les grandes villes, étant un des principaux obſtacles aux progrès de la population, il eſt certainement de l'interêt de l'État, que chaque Gouvernement en connoiſſe pour l'avantage des ſu-

jets

jets la véritable meſure & en faſſe un objet de ſon attention & de ſes ſoins. En la ſuppoſant pour toute la Ruſſie la même que nous venons de la trouver pour St. Pétersbourg; cette mortalité de la prémiere année y enleve annuellement 277000 enfans, dont il ſeroit poſſible de ſauver une bonne partie.

Répandre parmi le peuple par quelque voye bien imaginée de ſaines idées ſur les premiers ſecours qu'il convient de donner aux enfans, ainſi que ſur leurs maladies, s'oppoſer aux mauvais procédes que l'ignorance, le préjugé & l'indolence même leur font éprouver, voilà les premiers moyens, & qui dans la ſuite peuvent encore donner lieu à d'autres, de ſuppléer dans un païs fort étendu à l'impoſſibilité du ſecours général de la médicine.

3.) Il ſeroit bon auſſi, que les tables de mortalité des villes marquaſſent pour chaque enfant mort à cet âge-là, s'il a été allaité par ſa mere ou par une nourrice. Ailleurs on a conſtaté, & les tables de St. Pétersbourg ne manqueroient pas de le conſtater de même, que le nombre des enfans qui meurent entre les mains des nourrices ſurpaſſe le nombre de ceux, que la mort enleve à la mammelle de leurs meres, dans le rapport de 5 à 3; ajoutons-y, que les enfans mêmes des nourrices ſont auſſi pour l'ordinaire les victimes de l'abandon où les laiſſent leurs meres; & nous aurons une expreſſion arithmétique de la perte, qui s'enſuit pour l'État d'un ſervice mercenaire des nourrices mal-

heu-

heureuſement trop repandu. Pour les cas de neceſſité les Comptoirs des nourrices, tels qu'on les à établis en Suede, & la défenſe d'en prendre d'autres, que celles jugées dignes d'allaiter un enfant de la patrie, ſont des inſtitutions dignes d'etre imitées pour le bien de l'humanité.

3.) *Mortalité de l'Enfance.*

1.) La meſure de la mortalité ſpecielle de l'enfance à St. Pétersbourg nous offre une nouvelle preuve de la conſtitution forte & vigoureuſe des nationaux, & nous fait entrevoir les diſpoſitions favorables de la nature pour l'accroiſſement d'un peuple, qu'elle a doué de tant de vitalité, même dans une période de l'âge humain, où les forces de l'homme loin d'être portées à leur perfection, ne ſont encore que ſe deployer. Cette méſure eſt telle à St. Pétersbourg, que de 1000 enfans, tous agés d'un an, il y en a 785, qui accompliſſent la 15ieme année, & qu'il n'y en a, que 215 d'enlevés par la mort pendant cette periode; au lieu que d'autant d'enfans âgés d'un an, il en meurt en général, avant d'atteindre la 15ieme année, 290 en d'autres païs; 279 nommement en Suede; 258 à Stockholm; 435 à Londres &c. & 346 même à St. Pétersbourg chez les habitans étrangers de cette ville. Il reſulte de cet avantage de la nature, que la Ruſſie, de ſon million des naiſſances annuelles conſerve jusqu'au-de-là de 15 ans, au moins 562000 enfans, dont elle perdroit 94000 dans cet intervalle de temps, ſi la meſure de la mortalité ſpécielle de cette période étoit

cette période étoit pour les nationaux la même, que pour les étrangers établis à St. Pétersbourg *).

3.) Il eſt cependant digne de rémarque, que la forte vitalité des enfans ruſſes en général dans cette période de la vie, reſulte uniquement des mâles en particulier; car de 1000 filles agées d'un an, il en meurt 305 avant l'âge de 15 ans, au lieu que d'autant de garçons de même âge, il n'en meurt que 174 dans le même intervalle de temps; enſorte, que la mortalité des filles, qui dans la premiere année de la vie ſurpaſſoit celle des garçons dans le rapport de 8 à 5, la ſurpaſſe dans cette période en raiſon de 9 à 5. **) On en déduit par un calcul aiſé, que 1000 perſonnes, toutes agées de 15 ans, conſiſtent à St. Pétersbourg en 602 mâles & 398 fémelles, ce rapport s'accorde très bien avec ce qui a été dit cy deſſûs de l'excès plus fort à St. Pétersbourg qu'ailleurs, du nombre des mâles ſur celui de femelles.

4.) *Mor-*

*) Dans les grandes villes la moitié de tous les enfans meurt ordinairement avant l'âge de 10 ans, à Londres avant l'âge de 3 ans, & chez les étrangers de St. Pétersbourg avant celui de 5 ans. Mais chez les nationaux elle atteint à St. Pétersbourg l'âge au-de-là de 20 ans.

**) Chez les étrangers établis à St. Pétersbourg la mortalité des filles eſt dans cette même periode inferieure à celle des garçons dans le rapport de 50 à 53.

4.) Mortalité du moyen âge & de la vieilleſſe.

1.) La meſure de la mortalité ſpécielle du moyen âge à St. Pétersbourg nous découvre un phénomène auſſi disgracieux qu'inattendu; une très grande mortalité ſurvient tout à coup à l'age de 20 ans, qui ſemble éteindre ſubitement la plus grande partie de l'heureuſe vitalité que nous avons eu le plaiſir de remarquer dans les périodes precédentes, & qui attaque l'age le plus beau de la vie & le plus précieux à l'Etat, celui de 20 à 60 ans. La meſure de la mortalité ſpécielle de cette période eſt à St. Pétersbourg telle, que de 1000 perſonnes toutes agées de 20 ans, il n'y en a que 187 qui accompliſſent la 60. année & qu'il y en a conſequemment 813 d'enlevées par la mort durant cette belle periode de la vie; au lieu que de 1000 perſonnes toutes agées de 20 ans, il n'en meurt avant la 60. année que 544 en d'autres païs en général; 516 nommement en Suede; 712 à Stockholm, 720 à Londres & 764 chez les habitans étrangers de St. Pétersbourg. Les tables nous montrent, que cette mortalité qui eſt exceſſive pour l'un & l'autre ſexe, l'eſt cependant beaucoup plus pour les hommes que pour les femmes; car de 1000 hommes agés de 20 ans, elle en enleve 856, au lieu que d'autant de femmes de même age il n'y en a que 702, qui en ſont les victimes. La mortalité des hommes, qui dans la période de l'enfance étoit bien inférieure à celle des femmes, devient tout à coup deux fois auſſi grande dès l'entrée dans la 20. année. Il y a beaucoup moins de disproportion entre les meſures de cette mortalité pour les deux ſexes parmi les habitans étrangers de la ville.

2.)

2.) Une choſe digne de remarque & qui fournit des réflexions intéreſſantes ſur la cauſe probable de la grande mortalité de cette période, c'eſt qu'elle ſurvient ſubitement après une grande vitalité. La mortalité des enfans diminue rapidement dès la fin de la premiere année, & à l'age de 10 à 15 ans elle eſt ſi petite, qu'il ne meurt dans cet intervalle de 5 ans, qu'un de 50 mâles & une de 29 femelles. Tout à coup ces heureuſes diſpoſitions changent de face. A l'âge de 20 à 25 ans la mortalité eſt deja ſi grande, que dans cet égal intervalle de temps il meurt un de 6 mâles & une de 11 femelles; enſorte, que l'âge de 15 à 20 ans, dans lequel ſelon le cours ordinaire de la nature la force de la vie eſt dans un état de permanence, ou du moins ne diminue que très peu, eſt ici l'époque marquée de cette funeſte cataſtrophe. Or une dégradation auſſi prématurée & auſſi brusque que celle cy, ne ſcauroit être en aucune maniere l'effet de la nature, qui n'eteint les forces de la vie que par dégrés lents & ſucceſſifs. On eſt d'abord tenté de ſoupçonner, que cet excès de mortalité n'eſt qu'en apparence, & que cette eſpece d'illuſion eſt cauſée par le grand nombre des gens de cet âge-là qui arrivent des provinces dans la Capitale, & dont les morts augmentent la meſure de la mortalité de cette période, au lieu que celle de la periode précédente eſt tirée uniquement du nombre des morts des habitans propres de la ville. Sans doute, pour que les conſequences fuſſent hors de tout équivoque il faudroit ne conſulter que des tables, qui continſſent des indiuidûs nés & morts dans la ville. Mais nos tables nous préſen-

tent cependant des raiſons aſſès plauſibles, qui donnent lieu de ſoupçonner que le mal eſt réel, & qu'il eſt une ſuite des désordres & des excès, qui dès l'entrée de cette période troublent l'ordre de la nature, en épuiſant promptement les ſources de la vitalité. Un enſeignement digne de remarque que les tables nous donnent ſur l'espece de cette débauche, c'eſt qu'elle tue par des fiévres chaudes & des maladies de conſomption. Des recherches plus approfondies ſur cet objet & étendues à des Gouvernemens entiers, ne ſçauroient manquer d'eclaircir cette queſtion & d'être d'un grand intéret pour l'Etat, à qui il doit certainement importer, de ne pas perdre à la fleur de la jeuneſſe ou dans l'âge viril, une multitude de citoyens, qui ſelon les intentions de la nature auroient dû parvenir à l'âge des vieillards & qui conſequemment auroient dû pour le bien public fournir une beaucoup plus longue carriere qu'ils ne font actuellement, & laiſſer à l'Etat une poſterité nombreuſe & vigoureuſe. Pour faciliter ces recherches il ſeroit néceſſaire, que les tables euſſent plus de détail ſur ce point là, & qu'on en eut auſſi pour d'autres villes & pour des Gouvernemens entiers.

3.) Après la remarque précédente, on ne ſcauroit s'attendre qu'à un bien petit nombre de gens très vieux à St. Petersbourg. Nos tables démontrent, qu'il n'y a qu'un de 332 enfans, qui atteigne l'âge de 90 ans; au lieu que ſelon le cours régulier de la nature, plus que 3 fois autant devroient y parvenir. Elles font voir auſſi, & cela n'eſt pas moins d'accord avec la remarque précédente, que dans le petit nombre des vieilles perſonnes il y a moins d'hommes que de femmes.

4.)

4.) Cependant il n'eſt pas moins remarquable, que dans ce petit nombre il en eſt pourtant quelques unes, qui touchent à ce que de nos jours on peut appeller le dernier âge de la vie; car dans l'intervalle de 17 ans que les tables embraſſent, il y a eu 39 perſonnes qui ſont mortes à l'âge de plus d'un ſiécle, & trois qui ont pouſſé leur carrière jusqu'à l'âge de 120 & 130 ans.

VII.) Force des maladies & Etat de la ſanté publique.

La meſure de la force des maladies & de l'Etat de la ſanté publique, dont j'ai expoſé cy-deſſus les applications les plus utiles, eſt de tous les articles de nos tables celui qui a le plus de beſoin d'être mieux arrangé dans la ſuite, & qui le mérite à pluſieurs égards. Non ſeulement il ſeroit à deſirer, qu'on en fit le plan ſur une enumération plus préciſe des maladies, & qu'on y établît autant de conformité que poſſible avec les meilleures tables des autres païs, pour être à même d'en faire la comparaiſon; mais on apperçoit auſſi dans l'exécution du plan tel qu'il eſt, des mépriſes & des erreurs qui jettent trop d'incertitude ſur pluſieurs conſéquences qu'on voudroit en tirer, & qui rendent inutile presque toute comparaiſon de nos tables avec celles des étrangers. Or de bonnes tables ſur cet objet, étendues à différentes contrées de la Ruſſie, en formeroient une eſpece de Topographie médicinale, qui par la diverſité des climats & des nations indigénes ſeroit intéreſſante pour l'Hiſtoire naturelle de l'homme en général, & qui par la comparaiſon des divers endroits entre eux & avec le cours ordinaire de la nature,

indiqueroit auſſi au Gouvernement les avantages des uns & les néceſſités publiques des autres, & ſerviroit de baſe à des établiſſemens ſalutaires pour la conſervation & la ſanté de leurs populations. Quoiqu'il en ſoit de cette partie des tables de St. Petersbourg, j'ai jugé bon d'en expoſer ci-deſſus le tableau rédigé, ſoit dans la vûe d'en faire ſentir les defauts, afin qu'on y remedie dans la ſuite & ſurtout lorsqu'on donnera à ces tables une plus grande étendue, ſoit dans l'eſperance que telles qu'elles ſont elles pourroient cependant préſenter quelque point de vue utile aux citoyens. Je n'ai à y ajouter que quelques remarques générales, qui ſe ſont offertes à moi à la vue de ce tableau.

1.) De toutes les maladies, conſignées dans les tables, celles qui cauſent à St. Petersbourg la plus grande mortalité, ſont les Fièvres chaudes, qui enlevent le plus d'hommes, & les Pleureſies, qui enlevent le plus de femmes. Dans la période qu'embraſſent nos tables, la multitude des victimes de leur malignité a fourni plus de la moitié de la ſomme totale des morts. La maladie dont la force approche le plus de celle des Fièvres chaudes & des Pleureſies, c'eſt la Conſomption; elle fait plus de ravage parmi les hommes que parmi les femmes, & de celles cy elle enleve un plus grand nombre que la Fièvre chaude. Voici les nombres moyens de ceux qui meurent annuellement à St. Petersbourg de ces trois maladies:

Pleu-

	H.	F.	Somme.
Pleureſie	739	609	1348
Fièvre chaude	798	209	1007
Conſomption	436	235	671
	1973	1053	3026

Or le nombre moyen annuel de tous les morts étant 4616; on voit, que la force de ces trois maladies eſt telle, qu'enſemble elles contribuent pour plus de $\frac{1}{5}$ dans la totalité.

2.) Au nombre des maladies des enfans, dont il eſt fait mention dans nos tables telles, que les Convulſions, la petite Vérole, la Dentition, la Rougeole, il n'en eſt aucune, qui ne paroiſſe être beaucoup moins violente à St. Petersbourg qu'ailleurs, & qui n'y cauſe une bien moins grande mortalité que dans d'autres grandes villes. Il n'en eſt aucune auſſi, qui n'exerce plus de force ſur les filles, que ſur les garçons. Les Convulſions, qui ſont le plus de ravage & qui ſous ce point de vue méritent le plus de recherches de la part des medecins, enlevent annuellement 218 enfans ou la 24ième partie de toutes les naiſſances; cependant elles ſont beaucoup plus meurtrières ailleurs. En prenant le nombre moyen entre les trois années, qui dans nos tables précédent l'établiſſement de l'Inoculation en Ruſſie, la petite Vérole naturelle a alors enlevé annuellement à St. Petersbourg 157 enfans; d'ou il s'enſuit, que ce fléau univerſel de la population, qui en d'autres païs répand de temps en temps par des épidémies cruelles la terreur & la déſolation dans les familles & qui en géné-

général & à l'ordinaire emporte un quatorzième de tous les hommes qui naiſſent, n'a levé à St. Petersbourg que le tribut d'un trente-unième ſur toutes les naiſſances. On ne connoît pas avec préciſion, faute de tables plus étendues, quelle eſt la force de la petite Vérole naturelle en d'autres contrées de la Ruſſie; on ne ſcait que généralement, qu'elle fait dans quelques unes des ravages bien plus conſidérables. Mais grande ou petite, la malignité locale de cette maladie généralement ſi cruelle eſt ſusceptible d'etre réduite à un degré incomparablement moindre par une méthode aiſée, avouée par la raiſon, conſtatée par l'expérience & miſe à l'abri de toute objection ſoit phyſique, ſoit morale. L'année 1768 fut en Ruſſie l'époque heureuſe & à jamais mémorable, où pour établir & accréditer dans ſes Etats la pratique de l'Inoculation, notre très gracieuſe SOUVERAINE, veillant avec un ſoin maternel au ſalut public, commença par en donner l'exemple le plus encourageant ſur Sa perſonne auguſte & ſur celle de Son Fils l'Héritier de Sa Couronne; tout de ſuite après Sa *Majeſté* fonda des maiſons publiques d'Inoculation à St. Petersbourg, à Moscou, & dans l'interieur de la Sibérie. En prenant le nombre moyen entre les années qui dans nos tables ſuivent l'établiſſement de l'Inoculation en Ruſſie, la petite Verole naturelle a alors enlevé annuellement à St. Petersbourg 151 enfans; ce nombre etant comparé avec le nombre moyen des naiſſances de ces mêmes années, il en reſulte, que la petite Vérole naturelle n'a alors enlevé qu'un trente-cinquieme de toutes les naisſances, au lieu du trente-unième qu'elle en emportoit avant.

avant. (*) J'en tire la concluſion qu'il s'en faut de beaucoup que l'Inoculation, quoiqu'il ſemble qu'elle ait produit quelque changement dans la mortalité cauſée par la petite Vérole, ſoit en vogue à St. Pétersbourg autant qu'elle pourroit l'être ſuivant les intentions bienfaiſantes de *Sa Majeſté*, & qu'elle dévroit l'être par ſon importance pour l'humanité & les progrès de la Population. Dans l'intervalle de temps que les tables embraſſent, la petite Vérole naturelle a emporté à St. Pétersbourg 2829 enfans. Sept fois ce nombre, ou 19800 a donc été au moins le nombre des malades de la petite Vérole à St. Pétersbourg dans ce même intervalle de temps. Il n'en ſeroit peutêtre pas mort 60, à raiſon de trois par mille, s'ils avoient été inoculés. La pratique de l'Inoculation auroit donc ſauvé la vie dans cet intervalle de temps à 2769 citoyens dans la ſeule ville de St. Pétersbourg; & à combien ce gain national ne monteroit-il pas, ſi nous étendions ce calcul à toute la Ruſſie? En finiſſant ces courtes réflexions ſur les maladies des enfans à St. Pétersbourg, j'aurois bien déſiré d'être à même de conſulter ſur cet important objet les tables de mortalité des maiſons des Enfans trouvés, établies à St. Pétersbourg & à Moscou; je ſuis perſuadé qu'elles fourniroient des conſéquences qui mériteroient toute attention à plus d'un égard.

3.)

(*) Les liſtes des morts de la petite Vérole naturelle ont diminué d'un cinquième en Angleterre, dès que la pratique de l'Inoculation y eſt devenue plus commune.

3.) En prenant le nombre moyen, il y a annuellement à St. Pétersbourg 52 perſonnes qui périſſent par des accidens quelsqu'ils ſoient. Dans l'intervalle de temps compris dans nos tables, les accidens ont coûté la vie à 875 perſonnes, 630 hommes & 245 femmes. Il feroit à déſirer qu'à la place du titre général de *malheurs* les tables les ſpécifiaſſent en quelque façon; un pareil détail mettroit le Gouvernement ſur la voie de prendre des meſures pour prévenir les plus ordinaires; c'eſt ainſi que les nombres des noyés indiqueroient les villes riveraines, qui ont plus beſoin des établiſſemens publics, où l'on rappelle ces malheureux à la vie par les moyens dont on connoît aujourd'hui le ſuccès par quantité d'expériences. Le nombre des enfans étouffés dans le ſommeil par les meres ou les nourrices, eſt heureuſement très-petit à St. Pétersbourg: il n'y en a eu que 16 dans toute la période de nos tables. En eſt-il de même dans les autres villes de la Ruſſie? L'auroit on crû, ſi les tables de la Suede n'en euſſent trahi le ſecret, que plus de 700 enfans y périſſent annuellement de cette pitoyable manière?

4.) Le nombre moyen annuel des corps trouvés morts à St. Pétersbourg eſt de 117 perſonnes, 97 hommes & 20 femmes. Dans l'intervalle de temps que contiennent nos tables, on en a trouvé 1856. Ce nombre moyen, qui en l'année 1777 s'eſt accrû du double par quelque cauſe préjudiciable, eſt un objet digne de l'attention de la Police.

5.) Les

5.) Les expoſés des maladies des priſonniers, qui leur ont été mortelles, ne laiſſeroient non plus de donner lieu à des réflexions intéreſſantes pour l'humanité. L'ordre Impérial en fait une expreſſe mention.

6.) La révolution périodique de la mortalité, rélativement aux ſaiſons & aux mois de l'année, eſt viſible dans la XIIieme table. Les mois d'Octobre & de Novembre ſont ceux, où il meurt le moins de monde à St. Pétersbourg; dès la fin du dernier la mortalité augmente; & ſans ſe rallentir que très-peu pendant le mois de Février, elle s'accroît jusqu'au mois de Mai, dans lequel il meurt le plus d'hommes; paſſé ce mois-là elle va en diminuant jusque vers la fin de Novembre. Ces périodes de mortalité tiennent ſans doute en partie à l'époque de l'arrivée des gens de la campagne dans la capitale & à celle de leur retour chez eux; mais elles tiennent encore bien plus aux époques des ſaiſons locales & des changemens de temps, dont les viciſſitudes ſont, comme l'a dit Bacon, la cauſe principale de la déſtruction des êtres vivans. Si, ſans entreprendre de faire ici une balance météorologique de la ſalubrité des ſaiſons locales à St. Pétersbourg, nous nous en tenons ſimplement aux ſaiſons aſtronomiques: le réſultat eſt, que de 1000 morts à St. Pétersbourg, il y en a eu

294 au Printemps
264 en Été
212 en Automne
230 en Hiver

& que conſéquemment il meurt moins de monde pendant l'hiver, que pendant l'été. On obſerve le contraire dans les païs plus méridionaux; & même parmi les habitans étrangers de St. Pétersbourg, il meurt moins de monde pendant l'été que pendant l'hiver; ſi toutefois il eſt permis d'en juger d'après les tables d'une ſeule année.

VIII. Meſure des progrès de la population à St. Pétersbourg.

La meſure la plus préciſe de la promptitude avec laquelle s'accroît une population quelconque, par des progrès naturels & ſpontanés, qui ſans aucun ſecours des Colonies réſultent de l'état intérieur du peuple même, c'eſt la durée du temps qu'il faut, pour que cette population ſoit doublée ou accrue dans quelque rapport donné. Pour faire le calcul de ce temps, il faudroit qu'on connût non ſeulement la population actuelle, mais auſſi les meſures de ſa mortalité & de ſa fécondité générales. Mais s'il ne s'agit que de comparer les progrès de la population en de courtes periodes conſécutives; on peut ſuppoſer avec bien de la préciſion, que la viteſſe des progrès de la population eſt en raiſon de l'excès des nombres annuels des naiſſances ſur ceux des morts. Pour faire, conformement à ces principes, le paralléle de la viteſſe des progrès de la population à St. Pétersbourg dans les trois périodes conſécutives établies cy deſſus, on n'a qu'à jetter un coup d'oeil ſur la table ſuivante.

Période

Période.	Nombre moyen annuel des naiſſances	des morts	Excès du nombre des nés ſur celui des morts.
de 1764 – 1770	5122	4677	445
de 1771 – 1775	5115	4921	194
de 1776 – 1780	5638	4311	1327.

Cette table nous apprend que la viteſſe des progrès de la population, qui a eu lieu dans la période de 1764 jusqu'à 1770, & qui s'étoit ralentie très-ſenſiblement dans la ſeconde période de 1771 jusqu'à 1775, a pris de grands & de rapides accroiſſemens dans la derniere période de 1776 jusqu'à 1780; enſorte que, quoique la population elle-même ne ſe ſoit probablement augmentée que d'un dixième, cependant la *vigueur* de la population, c'eſt-à-dire, ſa *tendance à s'accroître* eſt dans la dernière période plus de trois fois plus grande que dans la premiere, & même presque ſept fois auſſi grande que dans la ſeconde période. C'eſt ainſi que de bonnes tables de fécondité & de mortalité, ſurtout étendues à des Provinces entières, préſentent l'expreſſion arithmétique la plus claire de l'influence des évenemens, ſoit naturels, ſoit politiques, ſur le bonheur des peuples, & qu'elles expoſent aux yeux des Souverains une eſpèce de Thermomètre politique, qui leur apprend le degré & les altérations du bien-être de leurs peuples, même des plus éloignés, ainſi que leurs néceſſités publiques, & qui conſéquemment leur indique les voies les plus ſûres pour repandre le bonheur ſur une multitude de citoyens. Il y a cependant ici une réflexion à faire, que la perſuaſion de ſon importance ne me permet point de diſſimuler; c'eſt que, ſi l'utilité de pareilles tables eſt grande

pour l'État, quand elles ſont marquées au coin de la vérité, le dommage qui peut en réſulter, n'eſt pas moindre, lorsqu'elles s'en écartent, ſoit par un motif de l'illuſion qu'on voudroit faire au Souverain, ſoit par la négligence de ceux qui les compoſent.

Tel eſt le raccourci des rémarques que les tables de fécondité & de mortalité de la ville de St. Pétersbourg pour la période de 17 ans, m'ont fournies, & qui m'ont parues être du reſſort de ce mémoire. Le but principal, que je me ſuis propoſé en rédigeant dans un ſeul tableau toute cette collection nombreuſe, c'étoit de faire une esquiſſe de l'utilité, qu'on pourroit tirer d'établiſſemens formels de pareilles tables étendues avec préciſion à des Gouvernemens entiers de la Ruſſie; (*) la nouvelle conſtitution des Gouvernemens de cet Empire, & la fondation d'un grand nombre de nouvelles villes ſous le regne glorieux de notre TRES-AUGUSTE SOUVERAINE en offrent l'époque la plus favorable, & les nouveaux réglemens & ordonnances, que la Ruſſie réçoit des mains maternelles de ſa grande Légiſlatrice, en ont amené l'occaſion la plus avantageuſe.

OECO-

(*) Voyés le traité von der Unſchädlichkeit der Pocken in Rußland und von Rußlands Bevölkerung überhaupt, publié à Goettingue l'an 1768. En compoſant mon memoire j'ai fait un frequent uſage de ce traité plein des vues les plus intereſſantes, qui a le celebre Mr. *Schloezzer* pour auteur. J'en donnerai le précis dans un ſeconde memoire ſur ce même objet.

OECONOMIE ET HISTOIRE NATURELLE

Extrait des Lettres de M. *Habliz'l* Correſpondant de l'Académie.

1. Sur la culture des prairies en Boucharie: datée d'Aſtrachan le 19 Juin 1781.

M. *Hablitz'l* marque à M. l'Académicien *Pallas*, qu'il a appris par un Ruſſe qui longtemps a été eſclave en Boucharie, que les paturages artificiels de ce païs, dont la plante a été indiquée par des voyageurs ſous le nom de *Beddé*, n'eſt autre choſe que la Luzerne (Medicago ſativa) qui croit ſur les landes au nord de la mer caſpienne. Elle eſt bien auſſi ſpontanée en Boucharie, mais pour en avoir une proviſion ſuffiſante, & pour ſubvenir au defaut des prairies naturelles, on la ſéme en aſſés grande quantité pour pouvoir, conjointement avec de la paille de quelques éſpeces de Sorgho (Holcus varius, Sorghum, ſacharatus) en nourrir le bétail & ſurtout les chevaux pendant tout l'hyver. On ne choiſit pas le terrein pour la culture de cette plante, mais on eſt obligé de ſubvenir à ces prairies factices par un arroſement artificiel. La

La ſemaille ſe fait en printemps; après que le terrein arroſé a été labouré & herſé, on y répand les graines ſans les couvrir de terre. On fauche la premiere année une ſeule fois, la ſeconde deux fois; mais par la ſuite on peut faire jusqu'à 5 ou 6 récoltes dans une ſaiſon. Après chaque récolte on donne un arroſement, & la prairie reſte en bon état pendant 25 à 30 années, ſans aucune autre amélioration ni culture que d'y répandre de deux en deux années un peu de fumier ſec, qu'on couvre d'une légère couche de ſable. L'herbe ſe donne pendant l'été toute fraiche au bétail; on en ſeche une proviſion pour l'hyver, & on la méle par ménage avec la paille de ris, de froment & du ſorgho. Lorsqu'on fait enfin labourer ces prairies pour leur donner un nouvelle culture, les racines de la Luzerne ſont encore une fort bonne nourriture pour les bêtes à cornes. Cette culture de la Luzerne ſeroit encore très-utile pour les landes des provinces méridionales de l'Empire de la Ruſſie, parcequ'elle réuſſit même ſur des terreins ſoumâtres & ſabloneux, pourvû que l'herbe y trouve de l'humidité.

Les voyageurs parlent encore d'une autre plante à pâturage que les Bouchares appellens *Touchàn.* Ce n'eſt que l'éſpece d'Abſinthe décrite dans l'ouvrage botanique du célébre *Jacquin* ſous le nom d'Artemiſia auſtriaca. Mais cette plante n'a pas beſoin d'être cultivée: elle vient & proſpère ſans art ſur les terreins les plus arides, & ſert de nourriture aux brebis, ſurtout pendant l'hyver, puisqu'elle continue de végéter ſous la neige.

2.) Ob-

2.) Obſervations d'hiſtoire naturelle faites ſur les côtes de la mèr Caſpienne: communiquées d'Aſtrabat en Perſe le 7 Juillet 1782.

Sa Majeſté l'Impératrice ayant fait équiper une petite escadre ſur la mer caſpienne pour chercher des établiſſemens plus avantageux & moins malſains pour le commerce de Ruſſie, M. *Hablitz'l* fut nommé en 1781 Secrétaire de cette Escadre, dont le commandement étoit confié à M. le Comte *Voynovich*, Dalmatien, Capitaine de haut bord & Chevalier de l'ordre militaire de St. George. C'eſt cette expédition qui fournit à notre Correspondant l'occaſion de faire des obſervations intéreſſantes ſur la côte de la Perſe, & ſurtout à Aſtrabat, où l'escadre avoit hyverné, & dont il communique à M. *Pallas* les ſuivantes.

Parmis les bêtes domeſtiques du Maſanderan, les vaches & les brebis ſont les plus remarquables; on y trouve une belle race de bêtes à corne, dont le dos s'élève au defaut du col en boſſe ou plustôt en crête d'un pied & même d'un pied & demi de haut. Cette boſſe eſt garnie de longs poils mols & hériſſés, qui continuent le long du col en maniere de criniere. Ce ſont les taureaux ſurtout qui ſe diſtinguent par la hauteur de cette boſſe: les vaches ne l'ont que très-petite, & ſouvent à peine ſenſible. Au reſte cette race ne ſe diſtingue de la race ordinaire du bétail, que par une encolure plus forte & plus racourcie, le train plus bas, une taille médiocre & une touffe des poils crépus ſur le front. On trouve ces beſtiaux dans tout le Maſanderan & aux environs d'Aſtrabat, mais ils ne ſe ſont pas encore répandus dans le

 Ghilan.

Ghilan. Les Perſans ignorent d'où ils leur ſont venus: mais en Boucharie & à Khiva, où on les élève auſſi, on les connoit ſous le nom de vâches arabes. Les taureaux de leur race s'accouplent volontiers avec les vaches ordinaires, & le produit devient ſemblable au mâle. Dans le diſtrict de Talichan, qui borde ſur le Ghilan, on en trouve auſſi à double boſſe, & la race y eſt très abondante. On dit que la ſeconde boſſe de cette variété s'élève ſur la partie poſterieure du dos vers la croupe.

(*) On a tranſporté par ordre de S. A. Msgr. le Prince *Potempkin* pluſieurs beſtiaux de cette race à St. Pétersbourg: & il ſemble qu'ils proſpèrent très bien dans le Parc de Sarskoe-Selo.

Les brebis ſe trouvent à Aſtrabat de trois races. La premiere eſt la race calmoucque, qui a une groſſe maſſe de graiſſe ſur la croupe au lieu de queue. La ſeconde qui eſt la plus commune dans toutes les provinces ſeptentrionales de la Perſe, reſſemble à la premiere & ne ſe diſtingue que par la petiteſſe de la maſſe de graiſſe & par une petite apendice ou queue attachée à cette maſſe. On la trouve auſſi dans le Caucaſe, d'où les Tſcherkiſſes en envoyent par troupeaux au marché d'Aſtrachan. La troiſieme race enfin eſt celle de Boucharie, qui a une queue applatie, presque triangulaire, à peu près comme la chèvre, & dont la laine eſt crepue & touffue comme celle de la tête d'un nègre.

Les bufles ſont ſi communs dans le Maſanderan, que les troupeaux errent partout ſur les marais & les bords

bords des anſes de la mer. Comme ils ſont naturellement feroces & qu'ils vivent en pleine liberté, le Capitaine Woodrooſe cité par Hanway, a pu fort bien prendre ces troupeaux pour des bufles ſauvages.

On n'a pas de chameaux dans le Maſanderan: peut-être parceque le buis leur eſt nuiſible, ou parcequ'il faut des landes arides & ſalées pour faire proſperer ces bêtes.

En voguant ſur la mer Caſpienne, M. *Hablitz'l* remarqua au mois de May, qu'un cable retiré de la mer pendant l'obſcurité de la nuit étoit parſemé d'étincelles brillantes. En recherchant la cauſe de ce phénomène, il trouvoit qu'il étoit l'effet d'un grand nombre de fauſſes chevrettes (Cancer Pulex Lin.) qui ſe trouvoient attachés à la vaſe & aux pacquets de petites moules, que le cable avoit enlévé du fond, & dont le contenu avoit été mangé par ces chevrettes, & remplacé par celles qui ſe trouvoient chargées d'oeufs. D'ailleurs on n'obſerve pas ordinairement dans la mer Caſpienne cette lueur phoſphorique, ſi commune dans l'Atlantique & dans l'Océan des Indes.

Au reſte M. *Hablitz'l* a obſervé que les couſins auſſi communs que les lampyrides aux environs de la baye d'Aſtrabad, y paroiſſent tous luiſans la nuit, en automne auſſi bien qu'au commencement de l'été: obſervation qui n'a pas encore été rapportée par aucun voyageur de l'Aſie méridionale.

ASTRONOMIE

Obſervations de la Comète de 1781

faites par M. M. l'Abbé *Chrétien Mayer* & ſon Aſſocié *Charles Koenig*, à l'Obſervatoire Electoral de Manheim avec un quart-de-cercle mobile de Siſſon, d'un pied & demi de rayon. Extraites d'une lettre datée de Mannheim le 6. Mars 1782.

Cette comète fut apperçue pour la premiere fois par M. *Koenig*, à qui elle parut le 8 Novembre après 7 heures du ſoir, à la vüe ſimple comme une étoile de la 4eme grandeur, mais d'une lumiere plus foible. Après y avoir dirigé une bonne lunette achromatique, elle ſe préſenta ſans queue, entourée d'une atmosphère blanchâtre & nébuleuſe: le noyau également foible de lumiere étoit rougeâtre: ſon diamètre fut eſtimé de 15 à 20 ſecondes. Sa ſituation étoit vers 9 heures de la même ſoirée telle qu'elle fit une ligne droite avec les étoiles γ de la petite & ζ de la grande Ourſe. M. *Mayer* ſe ſervit pour l'obſerver de la même methode qu'il avoit employée en 1769 à St. Pétersbourg, lorsqu'il y obſervoit la comète apparue peu de temps après le paſſage de la planète Venus par devant le diſque du Soleil. Comme il falloit employer la lumiere d'une bougie pour éclairer les fils de la lunette, la

la difficulté de ſaiſir les momens des contacts, augmentoit de jour en jour, ſurtout après le 10 Novembre. Cependant en faiſant un choix de ſes obſervations & en n'en ſoumettant aux calculs que celles qui lui parurent les plus certaines, M. *Mayer* obtint les déterminations ſuivantes, qu'il communiqua à l'Académie.

Année 1781.

Novembre.	Temps vrai de l'obſervation.	Aſcenſion droite.	Déclinaiſon boréale.	Latitude.	Longitude vraie.
le 6	18h. 4′. 54″	par inter	polation -	- - - - -	283°. 8′. 4″
7,	18. 4. 54	par inter	polation -	- - - - -	288. 43. 14
8.	9. 29. 27	257°.53′.18″	73°.42′.52″	81°.45′.15″	294. 13. 14
8.	18 4. 54	262. 24. 21	70. 49. 14	84. 53. 50	299. 12. 14
9.	15. 31. 34	274. 2. 37	64 17 35	87. 12. 10	308. 48. 43
9.	18. 4. 54	par inter	polation -	- - - - -	309. 41. 14
10.	18. 4. 54	par inter	polation -	- - - - -	315. 6. 24
13.	7. 58. 22	par inter	polation -	- - - - -	308. 27. 29
13.	8. 48. 23	293. 43. 37	39. 47. 58	60. 8. 32	308. 23. 9
14.	7. 58. 22	295. 30. 51	34. 43. 24	54. 52. 33	307. 58. 33
19.	7. 9. 54	299. 25. 25	19. 43. 0	39. 29. 51	306. 49. 15
19.	7. 58 22	par inter	polation -	- - - - -	306. 50. 48
24.	7. 0, 44	300. 40. 38	11. 39. 14	31. 22. 59	305. 49. 30
Octob le 26.	11 0. 0	132. 0. 0	33. 30. 0	49. 10. 51	121. 23. 39

Cette derniere obſervation du 26 Octobre avoit été faite à Berlin par M. *Bode* & enſuite calculée par M. *Mayer.*

Il paroit par l'interpolation du 19 Novembre, qu'il doit s'être gliſſée une faute conſidérable dans l'obſervation faite le même jour à $7^h. 9'. 54''$. M. *Mayer* s'eſt ſervi dans ſes interpolations des mêmes formules que M. *Euler* avoit employées dans ſes Recherches & Calculs ſur la vraie orbite de la Comète de 1769. pag. 6.

On voit auſſi par ces obſervations que le temps du périgée de cette comète n'a pas du être fort éloigné du 8 Novembre.

M. *Mayer* remarque enfin que le lieu de la Comète au 9 Novembre a été détermine par ſon paſſage au méridien, comparé à celui de l'étoile γ de la petite ourſe: qu'ayant obſervé

le paſſage de l'étoile γ le 9 Nov. à $12^h. 19'. 8''$.
celui de la comète - - - 15. 14. 10. t. v.

la différence des aſcenſions droites a été de $2^h. 55'. 2''$ en temps ou bien de $43°. 45'. 30''$ en parties de cercle.

Or l'aſcenſion droite de l'étoile γ corrigée par l'aberration & la nutation, étant trouvée de $230°. 17'. 7''$, celle de la comète a du être de $274°. 2'. 37''$; comme elle l'a été marquée dans la table: en obſervant que le plan du quart-de-cercle par lequel ces paſſages au méridien ont été marqués, diffère de $17'. 24''$ de temps du vrai plan du méridien vers l'Eſt.

Obſer-

Obſervations de la nouvelle Planète

découverte & vue pour la premiere fois par M. *Herſchel* à Bath le 13 Mars 1781.

Communiquées par M. l'Abbé *Mayer* & extraites de ſa lettre datée de Manheim le 6 Mars.

Noms des obſervateurs.	1781.	Jour. temps vrai.	Aſcenſ. droite.	Declin. boréale.
Maskélyne	Mars	17. 9^h.	83°. 59'. 44"	23°. 33'. 8"
	Avril	1. 9. 54'.	84. 21. 9	23. 54. 1
	——	18. 7. 43.	84. 56. 50	23. 35. 3
	Mai	28. 9. 5.	87. 5. 42	23. 37. 38
Darquier	Juillet	20.	90. 30. 41	23. 40. 43
	——	21.	90. 34. 23	23. 40. 50
	——	24.	90. 44. 53	23. 40. 52
	——	27.	90. 55. 12	23. 40. 52
	——	28.	90. 58. 32	23. 40. 33
	——	29.	91. 1. 50	23. 40. 16
	——	30. 15^h. 18'.	91. 5. 10	23. 40. 7
Mayer	Novembr.	4. 12. 28. 41"	92. 49. 19	23. 41. 31
	Décembre	21. 12. 1. 12	90. 58. 2	23. 43. 33
	——	23. 11. 51. 57	90. 52. 17	23. 43. 38
	1782.			
	Février	1. 8. 54. 7	89. 14. 9	23. 43. 44

Les temps marqués du 4 Nov. du 21, 23 Déc. & du 1 Février ſont les momens mêmes de la culmination de la planète, obſervée au quart-de-cercle mural avec une excellente pendule d'Arnold: d'où l'on déduit les longitudes & latitudes géocentriques ſuivantes:

Année

	Long. Géoc.	Latit. boréale.
Année 1781. Nov. le 4 à $12^h.28'.41''$	$92°.35'.\ 4''$	$0°.14'.48''$
—— Dec. le 21 à 12. 1. 12	90. 53. 8	0. 15. 30
—— – le 23 à 11. 51. 57	90. 47. 52	0. 15. 34
Année 1782. Févr. le 1 à 8. 54. 7	89. 18. 2	0. 15. 38

De là M. *Mayer* conclud

Temps vrai de l'oppoſition vraie de la planète avec le Soleil le 21 Décembre à $18^h.37'.38\frac{1}{2}''$.

Longitude vraie de la planète au moment de ſon oppoſition $90°.\ 52'.\ 24''$ ou $3^s.\ 0^d.\ 52'.\ 24''$; ſa latitude $0°.\ 15'.\ 6''$ boréale.

Cette longitude au moment de l'oppoſition étant égale à la longitude héliocentrique de la planète pour le même temps, en ſuppoſant la diſtance moyenne de la planète au ſoleil = 18,928, M. *Mayer* a calculé ſa longitude héliocentrique auſſi pour le 17 Mars, 30 Juillet, 4 Novembre, 21 & 23 Décembre, comme il ſuit

	Longitude héliocent.
Année 1781. Mars le 17 à 9^h. - -	$87°.\ 30'.\ 35''$
—— Juillet le 30 à $15.\ 18'$. -	89. 8. 28
—— Nov. le 4 à $15.\ 28.\ 40''$	90. 17. 4
—— Déc. le 21 à $18.\ 37.\ 38\frac{1}{2}$	90. 52. 24
—— —— le 23 à 11. 51. 57.	91. 25. 1.

D'où il détermine

Le mouvement horaire vrai de la planète dans ſon orbite autour du Soleil - - - $1''$, 82027.

Son mouvement diurne - - - - - 43, 6864.

Son mouvement annuel - - $4^d, 25', 56$, 5068.

M.

M. *Mayer* communique enſuite les obſervations ſuivantes faites à Bude en Hongrie par l'Aſtronome royal *François Weiſs*, qu'il aſſure être très bien d'accord avec celles qu'il a faites aux mêmes jours.

	Aſcenſ. droite.	Déclin. boréale.
A. 1782. Janv. le 6 à 10^h.48'.16''	90°.14'. 0'',7	23°.43'.0'',2
12 à 10. 25. 15	89. 58. 14. 6	23. 43. 7, 2
20 à 9. 45. 28	89. 39. 16, 5	23. 43. 4, 5
24 à 9. 28. 0	89. 30. 24.	23. 43. 1, 7

Au reſte il conclud de toutes ces obſervations, que le mouvement de la planète a été direct depuis le 13 Mars 1781 jusqu'au 10 Octobre de la même année, qu'il eſt devenu enſuite retrograde jusqu'au 21 Février 1782, au quel jour la planète a recommencé à ſe mouvoir de l'oueſt à l'eſt ſuivant l'ordre des ſignes, après avoir été ſtationnaire pendant quelque temps.

Enfin M. *Mayer* ayant comparé le moment du paſſage de la planète par le méridien avec celui de l'étoile Propus, ou H des Gémaux, il a trouvé que celui-ci précédoit celui-là

le 1. Février	de 6'. 3''	de temps
le 12. Février	de 5. 1.	
le 21. Février	de 3. 59.	
le 27. Février	de 4. 0.	
& le 2. Mars.	de 4. 2	

d'où il conclud, que l'élongation de la planète de cette étoile H des Gémaux a été la plus petite, le 21 Février.

MÉTÉOROLOGIE.

Hyver de 1781 à 1782.

ſuivant le nouveau Stile.

1.

La premiere neige tomba le 22 Octobre & la derniere le 7 Mai: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 197 jours.

2.

Il gela pour la premiere fois le 21 Octobre au ſoir. Thermomètre de Délisle 153, Baromètre 27. 43. vent de l'Eſt, ciel demi-couvert. Il gela pour la derniere fois le 9 Mai au matin; Thermomètre 152. Baromètre 28. 20, vent de l'Oueſt, ciel ſerein; l'intervalle entre cette derniere gelée & la premiere étant de 200 jours.

3.

La Néva fut priſe pendant 131 jours, depuis le 8 Décembre, où elle ſe couvrit des glaces du Ladoga par un froid de 165 degrés, jusqu'au 18 Avril qu'elle débacla par une temperature de 154 degrés. Les glaçons du lac de Ladoga parurent le 26 Avril, & la riviere en charia jusqu'au 9 Mai.

4.

4.

Le plus grand froid fut obſervé le 16 Février matin: le Thermomètre de Délisle marquant 206 degrés. Baromètre 28. 55, temps calme & ciel ſerein; puis brouillard & petit vent du Nord. Le moindre froid obſervé depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai, c'eſt-à-dire, pendant l'intervalle entre la premiere & la derniere gelée, fut de 135 degrés le 2 & le 3 Avril à 2 h. après midi: le Baromètre montant de 28. 13 jusqu'à 28. 20, ciel demi-couvert, petit vent du SE. La différence entre ces deux froids extrèmes eſt de 71 degrés de Délisle.

5.

Le froid moyen de la nuit, ou vers le matin, a été trouvé

depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin	158$^{d.}$, 8
depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai	162, 4
depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai	163, 6

Le froid moyen des après-midis

depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin	151$^{d.}$, 2
depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai	154, 9
depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai	157, 3

6.

Le froid de la nuit depuis le 21 Octobre jusqu'au 9 Mai, a été obſervé

6 jours au-de-là de 200$^{d.}$ le 31 Déc. 5 & 6 Janv. 13, 15 & 16 Février

8 jours entre 190 & 200, le 17. 21. 30 Déc. & le 11. 12. 14. 17. 20 Février.

10 jours entre 180 & 190, le 18. 20. 29 Déc. le 1. 4 Janv. le 7. 8. 19. 22 Février & le 16 Mars: enſuite.

24 jours entre 170 & 180, en Décembre, Janvier, Février & Mars (*)

47 jours entre 160 & 170, en Décembre — Avril

73 jours entre 150 & 160, en Octobre — Mai &

32 jours entre 140 & 150, en Octobr. Nov. Janv. Mars, Avril & Mai (**).

De ſorte qu'il a gelé pendant 168 jours dans cet intervalle d'hyver du 21 Octobre au 9 Mai, ou de 200 jours.

7.

Le froid de l'après-midi a été dans ce même intervalle de 200 jours d'hyver

8 jours moindre que 140, le 3. 9 Nov. le 31 Mars & le 2 — 5 Avril.

86 jours entre 150 & 140 en Octobre — Mai (***)

42 jours

(*) Le 16. 22 — 24. 28 Déc. le 7. 19 Janv. le 2. 3. 5. 6. 9. 21. 23 Févr. & le 9. 10. 12. 13. 15 17 — 20. 27 Mars.

(**) Le 23. 27. 28. 31 Oct. le 1 — 9 11. 13. 14. 17 — 19. 30 Nov. le 10 Janv. le 2. 3 Mars, le 1 — 4. 12 — 15 Avril & le 6 Mai.

(***) Le 21 — 24. 26 — 31 Octobre, le 1. 2. 4 — 8. 10 — 14. 16 — 30 Nov. le 1. 25 Déc. le 10 13. 21. 22. 26. 27. 30 Janv. le 24 — 27 Févr. le 1 — 7. 29. 30 Mars, le 1. 6 — 22. 24. 26 Avril, & le 1 — 8 Mai.

42 jours entre 160 & 150, en Octobre — Avril.
43 jours entre 170 & 160, en Décembre — Mars.
9 jours entre 180 & 170. le 16. 18. 20. 28. 29. 30 Déc. le 4 Janv. & le 7. 8 Févr.
8 jours entre 190 & 180, le 17. 21. Déc. le 6 Janv. & le 11 — 14. 19 Février; enfin
4 jours entre 200 & 190, le 31 Déc. le 5 Janv. & le 15. 16 Février.

d'où l'on voit que cet hyver a été un des plus rigoureux.

8.

L'État du Baromètre depuis le 1 Novembre juſqu'au 1 Mai, ce qui fait un intervalle de 181 jours.

La plus grande hauteur 28. 83 le 21 Décembre à 9 h. avant midi. Thermomètre $189^{d.}$ temps calme, brouillard; puis ciel ſerein.

La plus petite hauteur 27. 04, le 3 Janvier à 8 h. du ſoir. Thermomètre $160^{d.}$ vent du Sud, ciel couvert & beaucoup de pluïe.

La variation totale 1. 79
Le Milieu - - - 27. 935.
La hauteur moyenne 28. 02.

Pendant cet intervalle de 181 jours, la hauteur du Baromètre a été, 116 jours au deſſus de $27\frac{9}{15}$, $96\frac{1}{2}$ jours au deſſus de 28, & 74 jours au deſſus de $28\frac{1}{15}$ pouces de Paris.

9.

Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de 6 mois, ou 181 jours, d'hyver ont ſoufflé

6 jours du *Nord*, le 16. 23. 27 Déc. le 1 Janv. & le 18. 23 Avril

5 jours du NE, le 4 Janv. le 13. 14 Mars, & le 28. 29 Avril

6 jours de *l'Eſt*, le 3. 30 Déc. le 21. 24. 25 Mars, & le 27 Avril

4 jours du SE, le 16. 19 Nov. le 28 Déc. le 22 Mars

11 jours du *Sud*, le 13 Nov. le 5 Déc. le 3. 20. 21. 22. 23 Jan. le 25 Févr. & le 6. 29. 30 Mars.

3 jours du SOu, le 12 Janv. & le 4. 7 Mars.

8 jours de *l'Oueſt*, le 11. 12. 20 Nov. le 11. 19. 22 Déc. le 7 Jan. & le 1 Mars.

2 jours du NOu. le 10 Nov. & le 18 Déc.

En tout 45 jours de vent fort.

10.

Les vents très-forts ont regné

1 jour du *Nord*, le 11 Janvier.

1 jour de *l'Eſt*, le 11 Mars.

1 jour du SE, le 2 Janvier.

3 jours du *Sud*, le 14 Nov. le 25 Déc. & le 10 Janv.

1 jour du SOu., le 8 Janvier &

1 jour du NOu., le 25 Janvier

En tout 8 jours de vent très-fort.

11.

II.

La table ſuivante marque les autres variations de l'Atmoſphère, pendant les ſix mois d'hyver.

Atmoſphère.	Nov.	Déc.	Janv.	Févr.	Mars.	Avril	Somme.
Ciel entierement ſerein	1	3	4	9	9	15	41 jours
Ciel entierement couvert	19	12	19	9	13	4	71 —
Brouillards - - - -	9	7	3	9	5	2	35 —
Pluie { médiocre - - -	18	—	3	2	1	7	31 } 32 j.
Pluie { copieuſe - - -	1	—	—	—	—	—	1 }
Neige { médiocre - - -	11	14	11	9	9	4	58 } 68 j.
Neige { copieuſe - - -	2	2	3	1	1	1	10 }
Grêle - - - - - -	1	1	—	—	—	—	2 —
Aurores boréales - -	1	3	1	2	4	2	13 —
Hauteur de l'eau de pluie & de neige fondue.	1, 90	1, 12	0, 66	0, 46	0, 36	1, 24	5, 74

C'eſt-à-dire, la hauteur de l'eau de pluie & de neige fondue a été trouvé pendant ces ſix mois, de $5\frac{24}{100}$ pouces de Paris.

PRO-

PROGRAMME

pour l'Année MDCCLXXXIV

Publié le 7 Mars 1782.

Traduit du latin.

L'Académie avoit propoſé pour le ſujet du Prix de l'année 1781, la queſtion ſuivante.

Indiquer des raiſons certaines, s'il en exiſte, au moyen deſquelles on puiſſe démontrer l'uniformité du mouvement diurne de la terre, & ſi ce mouvement n'eſt point uniforme, mais qu'il éprouve en effet quelque changement, ſoit par la réſiſtance de l'Éther, ſoit par une autre cauſe quelconque qui agiſſe ſur la terre; Aſſigner quels ſont les Phénomènes qui produiſent ce changement dans le mouvement diurne de la terre? Quels ſont les moyens de rectifier la meſure du temps, par rapport à cette inégalité du mouvement diurne de la terre, afin d'avoir un point juſte de comparaiſon entre la méſure du temps des ſiecles paſſés, & celle des ſiecles moins reculés?

L'Académie n'ayant point tenu de ſéance publique l'année 1781, elle a arrêté de ne prononcer ſur les mémoires

moires qui lui ont été adreſſés à ce ſujet, qu'à la fin de 1783, & de proroger jusqu'au 1 Juillet de la même année l'admiſſion des mémoires qui pourront concourir.

L'Académie propoſe pour ſujet du Prix de l'année 1784 la nouvelle queſtion ſuivante:

La nutrition qui donne un nouvel accroiſſement à chacune des parties du corps animal, ou qui leur rend les forces qu'elles ont perdues par l'exercice; les phénomènes effectués par la garance, lorsque la rougeur dont ſe couvrent les os ſe répand en proportion égale dans toute la ſubſtance oſſeuſe, & ſe communique même aux plus petites parties qui la compoſent; enſuite la nutrition des différentes parties qui n'ont point de vaiſſeaux, telles que l'épiderme, les ongles, les poils & la corne; l'accroisſement enfin de l'embryon qui, pendant un temps déterminé, n'a ni vaiſſeaux, ni coeur, ni ſang, & bientôt après renferme un coeur immobile; démontrent aſſés clairement, que dans les adultes le mouvement du coeur, conduit d'abord les ſucs nourriciers par le moyen des vaiſſeaux, & que ces ſucs ſe répandent enſuite d'eux mêmes, par une force particuliere indépendante du mouvement du coeur, jusqu'aux parties extrèmes, où les vaisſeaux ne parviennent pas.

Dans les plantes qui ne ſont que végéter, qui cependant, comme les corps des animaux, pompent des ſucs, prennent de la nourriture, de l'accroiſſement & ſe rénouvellent continuellement, tant qu'elles ont de la vie; il n'y a aucune force que l'on puiſſe comparer au mouvement du coeur. Dans ces plantes donc la circulation des hu-

meurs, ſoit qu'elle ſe faſſe par le moyen des vaiſſeaux, ſoit qu'elle ſe diſtribue par la ſubſtance des parties qui n'ont point de vaiſſeaux, n'eſt due qu'à cette force ſeule dont nous venons de parler. On demande donc:

Quelle eſt la nature de cette force? Eſt-elle la même que la force attractive commune à tous les corps; ou, comme il y a tout lieu de le croire, eſt-ce une force propre à la ſubſtance végétale & animale? Si cette derniere opinion eſt vraie, on demande quels ſont ſes principaux effets, quelles propriétés la diſtinguent de la force attractive commune à tous les corps, & dénotent ſa nature particulière?

Les mémoires doivent être envoyés avant le 1 Juillet 1784, à l'Adreſſe du Secrétaire.

L'Académie rappelle enfin qu'elle a propoſé pour l'année 1783 les Problèmes ſuivans:

I. Expoſer la Théorie des machines que la force du feu, ou des vapeurs de l'eau font mouvoir.

II. Expliquer quel eſt le caractère des ſons que produiſent des tubes cylindriques d'un diamètre égal, qui étant conſtruits à l'un des bouts comme les flûtes à bec, ſont percés dans leur longueur d'ouvertures circulaires: qu'elle eſt la variété des ces ſons par rapport à la qualité grâve & aigue, ſelon la différente poſition & grandeur de ce trou latéral?

Chacun de ces prix eſt de cent Ducats d'Hollande, qui ſeront adjugés aux ſavants qui auront préſentés les meilleurs mémoires.

CHAN-

CHANGÉMENS
arrivés dans l'Académie pendant le premier ſemeſtre de 1782.

M. *Daniel Bernoulli*, le plus ancien & l'un des plus célébres membres de l'Académie, mourut à Bâle le 17 de Mars, dans la 83e année de ſon âge. Il étoit encore du temps de la fondation de l'Académie, & il avoit aſſiſté à ſon inauguration. Quoiqu'il n'aie démeuré que peu d'années à St. Pétersbourg, & qu'il ſe ſoit rétiré enſuite dans ſa patrie, il n'a ceſſé d'entretenir avec l'Académie une correſpondance intéreſſante & d'enrichir de temps en temps les Commentaires académiques de ſes profondes & importantes recherches. Auſſi avoit-il conſervé jusqu'à ſa fin une penſion académique.

L'Académie reçut:

1. Au nombre de ſes Correſpondans regnicoles

M. *Benoît François Hermann*, Profeſſeur en Technologie & membre de la Société patriotique Impériale & Royale de Vienne. La réception ſe fit le 24 Janvier ſur la pro-

poſition du Directeur; & le nouveau correſpondant partit quelque temps après pour le Gouvernement de Permie, où il a été employé à établir une fabrique d'acier.

2. Au nombre des Aſſociés externes:

M l'Abbé Don *Ferdinand Galiani*, Conſeiller au Conſeil ſouverain de Commerce de S. M. le Roi des deux Siciles.

Cette aggrégation eut lieu dans une Aſſemblée extraordinaire du 23 Mars, ſur une lettre du Directeur, qui portoit; que c'etoit par l'ordre de *Sa Majeſté Impériale* qu'il en faiſoit la propoſition à l'Académie.

Le haut & dirigeant Sénat notifia à l'Académie, par une Oucaſe datée du 25 Janvier; qu'il a plû à *Sa Majeſté l'Impératrice*, de gratifier M. l'Académicien *Pierre Simon Pallas*, du rang & du titre de Conſeiller de Colléges, & de lui accorder ſur le thréſor du Cabinet une augmentation conſidérable des ſes appointemens, avec ordre de reſter, comme ci-dévant, attaché à l'Académie.

S. E. Mr. le Procureur-Général Prince *de Väſemski* fit notifier à l'Académie dans ſa ſéance du 20 de Mai, que *Sa Majeſté l'Impératrice* a ordonné d'avancer M. *Nicolas Ozeretskovsky*, Docteur en Médecine & Adjoint en Hiſtoire naturelle, au grade d'Académicien ordinaire, qu'Elle lui accorde les appointemens attachés à cette charge dans l'état académique, & qu'Elle lui permet d'accompagner quel-

quelques jeunes Cavaliers dans un voyage, qu'ils vont faire en diverſes provinces de la Ruſſie.

M. l'Académicien *Lexell*, de retour de ſon voyage littéraire par la France, l'Angleterre, l'Allemagne & la Suéde, réprit poſſeſſion du Cabinet de l'Obſervatoire académique, où il avoit obſervé avant ſon départ. L'Académie lui fit remettre pour cet effet les inſtrumens aſtronomiques dont il a beſoin.

OUVRAGES

imprimés & manuſcrits,

curioſités & productions d'Hiſtoire naturelle, préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le premier ſemeſtre de l'année 1782.

Le Vendredi 7 Janvier. M. l'Adjoint *Ozeretskovsky* a préſenté un manuſcrit ruſſe **Историческïе Начатки о двинскомъ народѣ и. п.** contenant une Hiſtoire des anciens habitans d'Archangel, que l'Auteur M. *Kreſtinin*, citoyen d'Archangel, offre à l'Académie pour être publiée ſous ſon approbation. M. le Conſeiller de Cour *Lepéchin* ayant été chargé de l'examen de cet ouvrage, a rapporté dans une des ſéances ſuivantes, que cette hiſtoire eſt fort intéreſſante & qu'elle ne manquera pas d'être bien reçue du Public. L'Académie lui a, ſur ce témoignage, accordé ſon approbation, & le manuſcrit a été imprimé.

Le 10 Janvier. Le Secrétaire a remis de la part de M. *Jährig*, habitant auprès du lac Gouſinoi avec quelques prêtres mongaux, l'abrégé de traduction d'un ouvrage

vrage mongal intitulé *Manib-Gambo* & imprimé à Pé-king: ainſi qu'un pacquet contenant diverſes productions curieuſes de ces contrées.

—— M. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de M. *Hablitzl'*, datée du Golfe d'Aſtrabat le 1. Novembre, qui communique des détails intéreſſans d'un voyage qu'il a fait le long des côtes de la mer Caspienne. Voyez ci-deſſus.

Le 14 Janvier. L'Académie a reçu de S. E. Mr. le Major-Général & Chevalier de *Klitschka*, Gouverneur à Irkoutzk, une Corne & un pied de Rhinoceros très bien conſervés & trouvés dans ſon Gouvernement.

—— Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur

Benedict Franz Hermann's Profeſſors der Technologie und Mitglieds der K. K. patriotiſchen Societät in Wien: Reiſen durch Oeſterreich, Steyermark u. ſ. w. im Jahr 1780 in Briefen.

un volume in 8. dédié à l'Académie Impériale des Sciences, qui a reçu l'Auteur au nombre des ſes Correspondans.

Le 24 Janvier: M. l'Adjoint *Fuſs* a préſenté de la part de M. *Lhuilier*, Citoien de Genève employé à Varſovie, un mémoire manuſcrit ſur les Pyramides iſopérimètres, qui a remporté l'approbation de l'Académie.

Le 14 Février. Le Secrétaire a remis un écrit intitulé: *Introductio in disquiſitionem de Ponto Euxino & de Graecorum ad oras illius maris coloniis*, préſenté & ſou-

ſoumis à l'approbation de l'Académie, par M. *Hackmann*, Conrecteur du Gymnaſe Académique, demandant d'être reçu Adjoint de l'Académie. Mrs. les commiſſaires chargés de l'examen de cet écrit en ont fait un rapport favorable, & la reception a eu lieu dans le cours du ſemeſtre ſuivant.

Le 18 Février. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Böckmann*, Conſeiller de Cour & Profeſſeur en Mathématiques à Carlsruh, diverſes brochures, qui avoient déja été annoncées à l'Académie le 3 Décembre de l'année dernière, ſavoir:

Carlsruher meteorologiſche Ephemeriden vom Jahr 1779 im Auszuge, herausgegeben von *H. R. Böckmann.*

Wünſche und Ausſichten zur Erweiterung und Vervollkommung der Witterungs-Lehre.

Einladung zur Theilnehmung an den auf höchſten Befehl öffentlich anzuſtellenden Verſuchen und Erklärungen über die geſammte Naturlehre.

Erklärung und Bitte an die Freunde und Beförderer des Baadiſchen Inſtituts der Meteorologie in Abſicht der Gegenſtände und der Art ihrer Beobachtung.

—— il a lu deux lettres de M. *Jährig*, qui envoie diverſes deſcriptions & anecdotes hiſtoriques des peuples mongaux, avec quelques echantillons de minéraux trouvés dans le Thibet.

Le

Le 25 Février. Le Secrétaire a ouvert un pacquet addreſſé à l'Académie, qui contenoit:

Ephemerides aſtronomicae ad Meridianum Mediolanenſem ſupputatae ab Angelo de Ceſaris pro Anno 1782.

Les mêmes Ephémérides pour l'année 1783.

Le 28 Février. M. *Euler* le pere a communiqué pour être lu à la ſéance une feuille imprimée contenant les Statuts de l'Académie des Sciences & Arts nouvellement établie à Boſton en Amérique:

An Act to incorporate and eſtabliſh a Society for the Cultivation and Promotion of Arts and Sciences.

Le 4 Mars. M. l'Adjoint *Fuſs* a remis deux mémoires de Mathématiques:

Sur un Problème de Géométrie reſolu par l'Analyſe de Diophante.

Recherche d'une formule générale qui exprime toutes les différences de tous les ordres de x^n.

que M. *Wildbrecht*, élève de l'Académie lui a donnés pour être préſentés à l'Académie, afin de lui prouver l'emploi qu'il fait de ſon temps.

—— Le même a communiqué une lettre concernant la grande table des diviſeurs de tous les nombres au deſſous de cinq millions, que M. *Hindenburg* à Leipzig a calculée.

 Le

Le 11 Mars. Le Secrétaire a diſtribué le Proſpectus de Souſcription pour les éphémérides météorologiques que la Société électorale de Mannheim ſe propoſe de publier.

—— Il a lu une lettre circulaire que M. l'Abbé *Hemmer*, Secrétaire perpétuel de la ſusdite Société lui a adreſſée ſur ce ſujet, lequel lui annonce encore l'envoi d'une ſeconde caiſſe d'inſtrumens méteorologiques pour l'Académie.

Le 8 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Abbé *Mayer*, de Mannheim, qui envoie.

Obſervationes noui Planetae primum 1781 die 13 Martii in vrbe Paſh a Dno. *Herschell* detecti.

Obſervationes cometae anno 1781 menſe Novembri in ſpecula Electorali Mannheimenſi a *Chriſtiano Mayer* obſeruati.

—— —— une lettre de M. *Jean Bernoulli* Aſtronome royal de Berlin, qui notifie la mort de ſon Oncle *Daniel Bernoulli*, le plus ancien & l'un des plus célèbres membres de cette Académie: voyez ci-deſſus,

Le 11 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Jährig* du lac Gouſinoi, qui envoie le commencement d'une traduction de l'Ouvrage Mongal contenant l'eloge de la terre ſainte Ottaï en Chine.

Le 18 Avril. M. le Conſeiller de Cour *Lepéchin* & le Secrétaire ont communiqué des lettres de M. le Prof.

Prof. *Spielmann* à Strasbourg, qui annonce ſa *Pharmacopoea generalis*, & une nouvelle édition de ſes *Inſtitutiones chemicae*: il envoia auſſi

Ordonnance du Roi portant Réglement général concernant les hôpitaux militaires du 2 Mai 1781.

Le 22 Avril. Le Secrétaire a lu diverſes lettres de M. le Translateur *Jährig* datées du lac Gouſinoi, qui envoie encore pluſieurs matériaux pour l'hiſtoire des nations mongales, dont M. le Conſeiller de Collèges *Pallas* eſt chargé.

Le 6 Mai. M. l'Adjoint *Fuſs* a remis:

Proſpectus du Gloſſaire allemand par M. *Scherz*, que M. le Prof. *Oberlin* à Strasbourg fait imprimer.

Notice préliminaire du Cabinet de minéraux de feu M. le Conſeiller de mines *Delius* à Vienne.

Aufrichtige Entdeckung der beträchtlichen Vortheile, ſo durch Gebrauch des Eyerſchalen-Weis zu erhalten ſind.

Le 23 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. *de la Lande* de Paris, qui mande diverſes nouvelles littéraires & qui communique ſes dernieres obſervations de la nouvelle Planète.

Le 30 Mai. Le Secrétaire a remis de la part de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, le X. Volume des ſes

Nouveaux Mémoires: Année MDCCLXXIX, avec l'hiſtoire pour la même année. Berlin 1782.

Le 6. Juin. M. le Conſeiller de Collèges *Pallas* a préſenté de la part de l'Auteur.

Nicolai Joſephi Jacquin Miſcellanea auſtriaca ad Botanicam, Chemiam et Hiſtoriam naturalem ſpectantia Vol. II.

Le 10 Juin. M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. *de Magellan* de Londres, qui roule ſur un nouveau pyromètre que M. *Wedgewood* a inventé, & qui doit marquer avec beaucoup de juſteſſe les dégrés des plus fortes chaleurs.

Le 13 Juin. M. le Conſeiller de Collèges *Pallas* a lu une lettre fort détaillée de M. *Patrin*, Correſpondant de l'Académie à Barnaoul, qui communique diverſes obſervations botaniques, annonce un herbier qui juſqu'a préſent n'eſt pas encore parvenu à l'Académie, & qui fait un recit très-intéreſſant des excurſions qu'il a faites pendant les dernieres années.

Le 20 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à l'Académie par un nommé *J. U. Pauli* à Hambourg, qui envoie un imprimé intitulé

Ueber die Einrichtung eines ruſſiſch hanſeatiſchen Waaren Lombards und einer ſolchen Banc.

Il n'y a pas du ſens commun ni dans la lettre ni dans l'imprimé, qui en conſéquence a été mis à rebut.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE SYMPTOMATIBVS QVATVOR PVNCTORVM, IN EODEM PLANO SITORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Si quatuor puncta A, B, C, D in eodem plano fuerint ſita, eorumque bina lineis rectis inter ſe iungantur, quarum numerus erit ſex, inter has ſex rectas ſemper eiusmodi relatio ſubſiſtit, vt ex datis quinque earum, ſexta ſponte determinetur. Sex autem iſtae lineae rectae erunt A B, A C, A D, B C, B D, C D, inter quas iuuabit obſeruaſſe, binas dari quaſi ſibi oppoſitas, quae nullo communi termino contineantur, et tria dari huiusmodi binarum rectarum paria: Rectae enim A B opponitur recta C D; rectae Tab. I. Fig. 1.

 vero

vero A C opponitur recta B D, et rectae B C opponitur A D. Deinde vero inter has ſex rectas dantur quatuor terniones eiusmodi trium rectarum, quae triangulum includunt, qui ſunt 1°. A B, B C, A C; 2°. A B, A D, B D; 3°. A C, A D, C D; 4°. B C, B D, C D; vbi notandum, in quolibet ternione binas rectas oppoſitas excludi.

§. 2. Circa tales ſex rectas, quibus quatuor puncta in eodem plano ſita inter ſe iunguntur, plures occurrere ſolent quaeſtiones; vbi, ex datis quinque, ſexta requiri ſolet. Veluti in quadrilatero ex datis quatuor lateribus cum altera diagonali quaeritur altera diagonalis; vel ſi, dato triangulo quocunque A B C, in eius plano vbicunque accipiatur punctum D et ad id ex tribus angulis A, B, C ducantur tres rectae A D, B D, C D, quaeri ſolet relatio, quae inter has tres rectas ſubſiſtit, vnde ex datis earum duabus tertia definiri queat. Huiusmodi quaeſtiones a Geometris quidem plures ſunt pertractatae, verum earum Solutiones plerumque ingentem propoſitionum geometricarum farraginem requirunt; quin etiam plures nouas rectas in figura duci oportet, ex quibus certae relationes cum reliquis colligi queant, vnde tandem ſolutio deſiderata obtineri poſſit. Hic igitur in gratiam Geometrarum non parum oſtendiſſe iuuabit, quomodo ope duorum tantum Lemmatum omnes huiusmodi quaeſtiones pertractare et ad ſolutionem perducere liceat, ita vt nullis aliis rectis in ſubſidium vocandis ſit opus. Lemmatum quidem horum alterum eſt notiſſimum, alterum vero facili demonſtratione confirmari poteſt.

Tab. I. Fig. 2.

Lem-

Lemma 1.

§. 3. Ex tribus lateribus cuiusque trianguli A B C, quilibet angulus A ita determinatur, vt ſit

$$\text{coſ. } A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AB . AC}.$$

Lemma 2.

§. 4. Si tres anguli A, B, C ita fuerint comparati, vt eorum vnus A aequetur vel ſummae vel differentiae duorum reliquorum et horum angulorum coſinus deſignentur litteris α, β, γ, tum ſemper erit

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

Demonſtratio.

Si enim fuerit $A = B \pm C$, tum ex notis Trigonometriae principiis erit

$$\text{coſ. } A = \text{coſ. } B . \text{coſ. } C \mp \text{ſin. } B . \text{ſin. } C,$$

vnde fit

$$\text{coſ. } A - \text{coſ. } B . \text{coſ. } C = \mp \text{ſin. } B . \text{ſin. } C,$$

hoc eſt $\alpha - \beta\gamma = \mp$ ſin. B ſin. C. Hinc ſumtis vtrinque quadratis erit

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = \text{ſin. } B^2 \text{ ſin. } C^2,$$

et quia ſin. $B^2 = 1 - \beta\beta$ et ſin. $C^2 = 1 - \gamma\gamma$, erit facta multiplicatione

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = 1 - \beta\beta - \gamma\gamma + \beta\beta\gamma\gamma$$

ſicque termini $\beta\beta\gamma\gamma$ vtrinque ſe mutuo tollunt, vnde manifeſtum eſt fore

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma \text{ q. e. d.}$$

Corollarium 1.

§. 5. Haec relatio etiam locum habet, ſi ſumma trium angulorum $A + B + C$ aequetur quatuor rectis, ſeu $360°$; nam cum ſit $360° - A = B + C$, anguli $360° - A$ coſinus aeque eſt $= \alpha$ atque ipſius anguli A.

Corollarium 2.

§. 6. At ſi ſumma trium angulorum $A + B + C$ aequetur tantum duobus rectis, ſeu $180°$, ita vt iam ſit $180° - A = B + C$, quoniam anguli $180° - A$ coſinus non amplius eſt α, ſed $-\alpha$, aequatio relationem inter coſinus exprimens erit $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 - 2\alpha\beta\gamma$.

Scholion.

§. 7. His igitur duobus Lemmatibus praemiſſis oſtendam, quomodo eorum ope omnes huiusmodi quaeſtiones, in quibus quatuor occurrunt puncta in eodem plano ſita, facile per calculum reſolui queant.

Problema 1.

§. 8. *Si, propoſito triangulo quocunque ABC, in* Tab. I. Fig. 2. *eodem plano ſiue intra ſiue extra triangulum accipiatur punctum quodcunque D, atque ad id ex angulis ducantur rectae AD, BD, CD, inuenire relationem, quae inter has ternas rectas et latera trianguli ſubſiſtet.*

Solutio.

Vocentur trianguli latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, tum vero rectae ad punctum D ductae $AD = p$,

$BD =$

$BD = q$ et $CD = r$, ita vt deſideretur aequatio relationem inter has ſex lineas a, b, c et p, q, r exprimens. Iam hic conſiderentur anguli ADB, ADC, BDC, quorum ſumma eſt 360°, vnde ſi dicatur

$$\cos . ADB = \gamma, \cos . ADC = \beta \text{ et } \cos . BDC = \alpha,$$

erit vtique per §. 5.

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

At vero per Lemma primum erit

$$\cos . ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD.BD}, \text{ ſiue } \gamma = \frac{pp + qq - cc}{2pq},$$

eodemque modo

$$\cos . ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD.CD}, \text{ ſiue } \beta = \frac{pp + rr - bb}{2pr},$$

ac denique

$$\cos . BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD.CD}, \text{ ſiue } \alpha = \frac{qq + rr - aa}{2qr}.$$

Ponamus nunc breuitatis gratia

$$qq + rr - aa = A; \; pp + rr - bb = B \text{ et } pp + qq - cc = C,$$

vt fiat

$$\alpha = \frac{A}{2qr}; \; \beta = \frac{B}{2pr}; \; \gamma = \frac{C}{2pq};$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma$$

induet hanc formam:

$$\frac{AA}{4qqrr} + \frac{BB}{4pprr} + \frac{CC}{4ppqq} = 1 + \frac{ABC}{4ppqqrr},$$

quae in $4ppqqrr$ ducta dat:

$$AApp + BBqq + CCrr = 4ppqqrr + ABC.$$

Iam in hac aequatione loco litterarum A, B, C, valores aſſumtos ita ſubſtituamus, vt formulas $pp + qq$, $pp + rr$, $qq + rr$ iunctas ſeruemus, ac reperietur ſequens aequatio:

pp

$$\left.\begin{array}{l} pp(qq+rr)^2-2aapp(qq+rr)+a^4pp \\ +qq(pp+rr)^2-2bbqq(pp+rr)+b^4qq \\ +rr(pp+qq)^2-2ccrr(pp+qq)+c^4rr \end{array}\right\} =$$

$$=\left\{\begin{array}{l} (qq+rr)(pp+rr)(pp+qq)+4ppqqrr \\ \quad -aa(pp+qq)(pp+rr)-bb(pp+qq)(qq+rr) \\ \quad -cc(pp+rr)(qq+rr) \\ \quad +aabb(pp+qq)+aacc(pp+rr)+bbcc(qq+rr) \\ \quad -aabbcc. \end{array}\right.$$

Conſideremus nunc primo vtrinque ea tantum membra, quae ſolas litteras p, q, r, continent; ac in parte ſiniſtra bina priora membra huius generis, ſcilicet

$$pp(qq+rr)^2+qq(pp+rr)^2$$

euoluta, praebent

$$\begin{array}{l} ppq^4+ppr^4+2ppqqrr \\ +qqp^4+qqr^4+2ppqqrr \end{array} = (pp+qq)(ppqq+r^4)+4ppqqrr$$

cui ſi tertium membrum

$$rr(pp+qq)^2=(pp+qq)(pprr+qqrr)$$

addatur, obtinebitur

$$(pp+qq)(ppqq+pprr+qqrr+r^4)+4ppqqrr=$$
$$(pp+qq)(pp+rr)(qq+rr)+4ppqqrr,$$

vnde patet partes, quae vtrinque ſolas litteras p, q, r inuoluunt, ſe mutuo deſtruere. Hanc ob rem reliqua membra ad partem ſiniſtram translata producent ſequentem aequationem:

$$0=\left\{\begin{array}{l} +aa(pp+qq)(pp+rr)+bb(pp+qq)(qq+rr)+cc(pp+rr)(qq+rr) \\ -2aapp(qq+rr)-2bbqq(pp+rr)-2ccrr(pp+qq) \\ -aabb(pp+qq)\quad -aacc(pp+rr)\quad -bbcc(qq+rr) \\ +a^4pp+b^4qq+c^4rr+aabbcc \end{array}\right.$$

Singulis igitur his terminis in ordinem redactis orietur ſequens aequatio:

aapp

$$\left.\begin{matrix} aapp(aa+pp-bb-cc-qq-rr) \\ +bbqq(bb+qq-aa-cc-pp-rr) \\ +ccrr(cc+rr-aa-bb-pp-qq) \end{matrix} \begin{matrix} +aaqqrr \\ +bbpprr \\ +ccppqq \\ +aabbcc \end{matrix}\right\} = 0.$$

Haec igitur eſt aequatio quaeſita, relationem inter ſex quantitates a, b, c et p, q, r exprimens.

Corollarium 1.

§. 19. Transferamus terminos negativos ad alteram partem, et noſtra aequatio ita ſuccincte exhiberi poterit:

$$\left.\begin{matrix} aapp(aa+pp) \\ +bbqq(bb+qq) \\ +ccrr(cc+rr) \end{matrix} \begin{matrix} +aaqqrr \\ +bbpprr \\ +ccppqq \\ +aabbcc \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} aapp(bb+cc+qq+rr) \\ +bbqq(aa+cc+pp+rr) \\ +ccrr(aa+bb+pp+qq) \end{matrix}\right.$$

Corollarium 2.

§. 10. Super hac aequatione ſequentia ſunt animadvertenda. 1°. Omnium ſex linearum in aequatione hac tantum quadrata occurrunt, ſicque ea manebit eadem, etiamſi quaepiam harum linearum fiant negatiuae. 2°. Inter has ſex lineas a, b, c & p, q, r, binae ſibi oppoſitae ſunt, quae nullum habent terminum communem: primo a cum p; ſecundo b cum q et tertio c cum r, quae tria paria in primo ordine occurrunt, ita vt vnumquodque productum ex huiusmodi binis quadratis in ſummam eorundem ſit ductum. 3°. In parte autem dextra eadem occurrunt producta $aapp$, $bbqq$, $ccrr$, ita vt vnumquodque per ſummam reliquorum quadratorum ſit multiplicatum. 4°. Tandem, ordo poſterior ad ſiniſtram partem quatuor conſtat membris, quorum ſingula eiusmodi

 tres

tres lineas continent quae triangulum conſtituunt, quemadmodum ſcilicet a, q, r triangulum B C D includunt, lineae vero b, p, r triangulum A C D, lineae c, p, q triangulum A B D, et a, b, c triangulum A B C; ſicque ratio, qua iſta aequatio componitur, luculenter perſpicitur.

Corollarium 3.

Tab. I. Fig. 3. §. 11. Praeterea vero ſingularum harum litterarum poteſtates quartae in aequatione occurrunt; vnde intelligitur, ſi earum quinque fuerint datae, ſextam ex iis duplici modo determinari poſſe, id quod cum rei natura egregie conuenit. Si enim praeter tria latera a, b, c dentur binae rectae p et q, ex figura euidens eſt, easdem ita ad alteram partem diſpoſitas eſſe poſſe, vt ſit $\mathrm{A}d = p$ et $\mathrm{B}d = q$, vnde ſexta r poterit eſſe vel C D vel C d.

Corollarium 4.

§. 12. Quod ſi autem ſumamus quinque rectas a, b, c et p, q eſſe datas, videamus quomodo ex iis ſexta r determinetur; quem in finem aequatio quarti gradus ita diſponatur:

$$ccr^4 = \begin{cases} +rr((aa-bb)(pp-qq)+cc(aa+bb+pp+qq-c^4) \\ -(aapp-bbqq)(aa-bb+pp-qq)-cc(aa-qq)(bb-pp), \end{cases}$$

cuius autem vlterior euolutio in nimis taedioſas ambages praecipitaret.

Problema

Tab. I. Fig. 1. §. 13. *Datis in quadrilatero* A B C D *quatuor lateribus* A B = a, B C = b, C D = c, D A = d, *cum altera diagonali* A C = f, *inuenire alteram diagonalem* B D = x.

Solu-

Solutio.

Aequatio in praecedente Problemate inuenta nos facile ad ſolutionem huius manuducet, ſi modo perpendamus, inter ſex lineas a, b, c, d, f et x, quae hic occurrunt, dari tria binarum oppoſitarum paria, quae ſunt 1°. a et c 2°. b et d ac 3°. f et x. Deinde vero dantur quatuor terniones, quibus triangula includuntur, qui ſunt 1°. a, b, f pro triangulo A B C; 2°. a, d, x pro triangulo A B D; 3°. b, c, x pro triangulo B C D; 4°. denique c, d, f pro triangulo A C D. Quibus obſeruatis aequatio ſolutionem continens ſequenti modo erit comparata, ſi modo quae in Corollario 2do. ſunt praeſcripta, rite obſeruentur

$$\left.\begin{array}{l} +aacc(aa+cc) \\ +bbdd(bb+dd) \\ +ffxx(ff+xx) \end{array}\begin{array}{l} +aabbff \\ +aaddxx \\ +bbccxx \\ +ccddff \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +aacc(bb+dd+ff+xx) \\ +bbdd(aa+cc+ff+xx) \\ +ffxx(aa+bb+cc+dd) \end{array}\right.$$

cuius reſolutio dabit binos valores ipſius x.

Corollarium 1.

§. 14. Ad hoc illuſtrandum ſumamus eſſe $aa = 1$, $bb = 2$, $cc = 3$, $dd = 4$, $ff = 5$, et ex his valoribus colligitur iſta aequatio: $5x^4 = 26xx - 25$, ideoque

$$xx = \frac{13 \pm \sqrt{44}}{5}.$$

Hinc ergo in fractionibus decimalibus erit, vel

$$xx = 3,92665, \text{ vel } xx = 1,27335,$$

extracta igitur radice quadrata erit vel $x = 1,981$ vel $x = 1,128$.

Corollarium 2.

§. 15. Cum hic de quadrilateris agatur, quoniam duae ſpecies principales tractari ſolent, quarum altera continet parallelogramma, in quibus latera oppoſita ſunt aequalia $c = a$ et $d = b$, altera vero quadrilatera circulo inſcripta, in quibus ſemper eſt $ac + bd = fx$, has duas ſpecies in ſequentibus exemplis euoluamus.

Exemplum 1.

§. 16. Sint quadrilateri bina latera oppoſita inter ſe aequalia, ſcilicet AB = CD et BC = AD, ſiue $c = a$ et $b = d$, quibus poſitis aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\left.\begin{matrix} 2a^6 + 2b^6 + ffxx(ff+xx) + 2aabbff \\ + 2aabbxx \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a^4(2bb+ff+xx) \\ b^4(2aa+ff+xx) \\ ffxx(2aa+bb), \end{matrix}\right.$$

quae, ſecundum dimenſionem litterarum f et x diſpoſita, ita adornetur:

$$\left.\begin{matrix} f^4xx - 2ffxx(aa+bb) - ff(aa-bb)^2 - xx(aa-bb)^2 \\ + ffx^4 \qquad + 2(aa-bb)^2(aa+bb) \end{matrix}\right\} = 0$$

quae diuiſorem habere deprehenditur

$$ff + xx - 2(aa+bb),$$

vnde naſcitur quotus $ffxx - (aa-bb)^2$, ſicque hinc naſcitur duplex ſolutio: prior ſcilicet

$$ff + xx = 2aa + 2bb,$$

quae continet proprietatem notiſſimam omnium parallelagrammorum, qua ſumma quadratorum diagonalium aequatur

tur ſummae quadratorum laterum. Praeterea vero alia Solutio locum habere poteſt, qua ſit $fx = aa - bb$, in parallelogramma neutiquam competens; refertur haec proprietas ad eam trapeziorum ſpeciem A C B D, in qua altera bina latera A C et B D ſunt inter ſe parallela, altera vero B C et A D inter ſe aequalia: in hac enim figura vtique erit Tab. I. Fig. 4.

$$AC \cdot BD = AB^2 - BC^2,$$

ſiue cum in hac figura latera A B et C D manifeſto ſint aequalia, erit

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD,$$

quae proprietas declarat hanc figuram circulo eſſe inſcriptibilem, in qua cum iam rectae A B et C D ſint diagonales, per Theorema Ptolemaicum erit vtique

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD.$$

Exemplum 2.

§. 17. Sumamus nunc quadrilaterum A B C D, cum ſuis diagonalibus A C et B D, ita eſſe comparatum vt ſit $fx = ac + bd$, ſiue Fig. 1.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Nunc in noſtra aequatione generali loco $ffxx$ ſcribamus $(ac + bd)^2$, ac membra ſecundum ff et xx diſponamus, vnde depromamus primo ea, quae continent formulam $ff + xx$, deinde ea, quae continent ſeorſim ff et xx, denique vero ea quae neque f continent neque x, quo obſeruato noſtra aequatio ad ſequentem formam redigetur:

 $(ff +$

$$\left.\begin{array}{l}(ff+xx)((ac+bd)^2-aacc-bbdd)+ff(aabb+ccdd)+xx(aadd+bbcc)\\ +aacc(aa+cc-bb-dd)-(ac+bd)^2(aa+bb+cc+dd)\\ +bbdd(bb+dd-aa-cc)\end{array}\right\}=0$$

quare cum huius aequationis primum membrum contrahatur in

$$2abcd\ (ff+xx),$$

tota aequatio ſequentem accipiet formam:

$$ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2bd(ac+bd)(aa+cc)\atop -2ac(ac+bd)(bb+dd)=0,$$

cuius poſtremum membrum in ſuos factores reſolutum producet:

$$ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)=0,$$

in qua aequatione ſi loco $ac+bd$ iterum ſcribatur fx, prodibit

$$ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2fx(ab+cd)(ad+bc)=0,$$

quae forma manifeſto eſt quadratum; vnde ſequitur fore

$$f(ab+cd)-x(ad+bc)=0,$$

quae aequatio ergo praeter aſſumtam $fx=ac+bd$ etiam exprimit inſignem proprietatem quadrilaterorum circulo inſcriptorum.

Corollarium.

§. 18. Pro omnibus igitur quadrilateris circulo inſcriptis non ſolum valet proprietas notiſſima $fx=ac+bd$, ſed etiam haec altera $\frac{f}{x}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, quibus duabus aequationibus demum natura horum quadrilaterorum exhauritur. Hinc autem ſi prior per poſteriorem vel multiplicetur vel diuidatur, ambae diagonales ſeorſim determinabuntur ſequentibus formulis:

$$ff=\frac{(ac+bd)(ad+bd)}{ab+ca}\ \text{et}\ xx=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Scho-

Scholion.

§. 19. Hae autem duae formulae immediate ex ea horum quadrilaterorum proprietate, qua bini anguli oppoſiti duobus rectis aquantur, facillime deriuantur. Cum enim ſumma coſinuum duorum angulorum, quorum aggregatum duobus rectis aequatur, ſemper ſit nihilo aequalis, erit tam coſ. B A D + coſ. B C D = o, quam

$$\text{coſ. } ABC + \text{coſ. } CDA = 0;$$

vnde, ſi ex triangulis hi coſinus per Lemma primum definiantur, hae duae orientur aequationes:

$$\text{I. } \frac{aa+dd-xx}{2ad} + \frac{bb+cc-xx}{2bc} = 0.$$

$$\text{II. } \frac{aa+bb-ff}{2ab} + \frac{cc+dd-ff}{2cd} = 0,$$

ex quarum illa determinabitur xx, ex hac vero ff, ſequenti modo:

$$xx = \frac{aabc+bcdd+abbd+accd}{bc+ad} = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} \text{ et}$$

$$ff = \frac{aacd+bbcd+abcc+abdd}{ab+cd} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

Circa haec quadrilatera adiungamus ſequentem quaeſtionem Diophanteam.

Quaeſtio.

§. 20. *Inuenire quadrilaterum circulo inſcriptum, cuius tam latera quam ambae diagonales numeris rationalibus exprimantur.*

Solutio.

Poſitis vt ſupra quatuor lateribus $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ et $DA=d$ et diagonalibus $AC=f$ et $BD=x$, ne-

neceſſe eſt vt hae duae formulae:

$$ff = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \text{ et } xx = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

reddantur quadrata, quarum productum cum iam ſit quadratum, tantum opus eſt vt alterutra efficiat quadratum. Fiat igitur $\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} = \square$, quod euenit ſi fuerit

$$(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc) = \square,$$

id quod duplici modo commode fieri poterit.

I°. Enim ſtatuatur

$$(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc) = (ac+bd)^2 zz,$$

eritque facta euolutione

$$aabd + abbc + acdd + bccd = (ac+bd)^2 zz,$$

cui conditioni ſi fuerit ſatisfactum, fiet

$$f \frac{(ac+bd)z}{ab+cd} \text{ et } x = \frac{(ac+bd)z}{ad+bc}.$$

Hic autem ſtatim ſumatur $z = d$, vt fiat

$$aabd + abbc + bccd = bd^3, \text{ ſiue}$$

$$aad + abc + ccd = d^3,$$

vnde colligitur $b = \frac{d^3 - d(aa+cc)}{ac}$, ſicque tria latera a, c, d pro ſubitu aſſumi poſſunt, quandoquidem ex iis quartum latus b, tum vero ambae diagonales f et x, rationaliter definientur, cum ſit

$$f = \frac{d(ac+bd)}{ab+cd} \text{ et } x = \frac{d(ac+bd)}{ad+bc}.$$

II°. Deinde vero euoluatur productum illud ex tribus factoribus conſtans, quod quadratum reddi oportet et quod ita ſe habebit:

a^4

$$\left.\begin{array}{l} a^3 b c d + a a (b b c c + c c d d + b b d d) \\ a b c d (b b + c c + d d) + b b c c d d \end{array}\right\} = \square.$$

Ad hanc formam tractabiliorem reddendam faciamus breuitatis gratia

$$b c d = p,$$
$$b b + c c + d d = q \text{ et}$$
$$b b c c + c c d d + b b d d = r,$$

vt haec aequatio reſoluenda habeatur:

$$a^3 p + a a r + a p q + p p = \square;$$

cuius radix quadrata ſtatuatur $= \frac{1}{2} a q + p$, cuius quadratum cum ſit $\frac{1}{4} a a q q + a p q + p p$, hoc inde ſubtractum relinquet hanc aequationem:

$$a^3 p + a a r = \tfrac{1}{4} a a q q,$$

vnde colligitur $a = \frac{q q - 4 r}{4 p}$: Eſt vero

$$q q - 4 r = b^4 + c^4 + d^4 - 2 b b c c - 2 b b d d - 2 c c d d,$$

ſiue

$$q q - 4 r = (c c + d d - b b)^2 - 4 c c d d,$$

quae expreſſio reſoluitur in hos factores:

$$(c c + d d + 2 c d - b b) \text{ et } (c c + d d - 2 c d - b b),$$

quorum quia vterque eſt iterum differentia duorum quadratorum, omnino habebimus quatuor factores ſimplices iſtos:

$$(c + d + b)(c + d - b)(c - d + b)(c - d - b);$$

ſicque nacti ſumus ſequentem ſolutionem:

$$a = \frac{(c + d + b)(c + d - b)(c - d + b)(c - d - b)}{4 b c d}.$$

 Hoc

Hoc autem valore inuento radix quadrata noſtri producti ex tribus factoribus conſtantis erit

$$\tfrac{1}{2} a q + p = \frac{q^3 - 4 q r + 8 p p}{8 p}.$$

Praeſtat autem ex valore inuento ipſius a ipſas ternas formulas $a c + b d$, $a b + c d$, et $a d + b c$ computare, quibus inuentis erit

$$f = \sqrt{\frac{(a c + b d)(a d + b c)}{a b + c d}} \text{ et } x = \sqrt{\frac{(a c + b d)(a b + c d)}{a d + b c}},$$

quandoquidem hinc radices extrahere licebit.

METHODVS FACILIS
OMNIA SYMPTOMATA
LINEARVM CVRVARVM
NON IN EODEM PLANO SITARVM
INVESTIGANDI.

Diſſertatio prior.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Symptomata linearum curuarum, quae non totae in eodem plano iacent, et a Geometris lineae duplicis curuaturae vocari ſolent, iam pridem quidem definita reperiuntur: verum analyſis, qua ea ſunt inueſtigata, figuris tantopere perplexis innituntur, vt non ſolum ſummam attentionem, ſed etiam maximam circumſpectionem requirant, ne repraeſentatio quantitatum differentialium, atque adeo differentialium ſecundi gradus, imaginationem confun-

 dat,

dat et in errores ſeducat. Quamobrem ſaepe et multum mecum cogitaui, annon eadem ſymptomata methodo faciliori ex primis elementis deriuari queant, ita vt non opus ſit figuras tantopere complicatas et propemodum inextricabiles conſiderare. His omnibus difficultatibus probe perpenſis tandem perſpexi, totum negotium ſatis commode ad Trigonometriam ſphaericam reuocari atque adeo multo plenius tractari poſſe, quam quidem methodo vulgari fieri licet.

§. 2. Ante autem indolem harum linearum curuarum, in genere ſaltem, more ſolito conſiderari conueniet, quam totam quaeſtionem ad doctrinam ſphaericam transferre queamus. Conſtitutis igitur pro lubitu ternis axi-
Tab. I. bus inter ſe normalibus O A, O B, O C, in puncto fixo
Fig. 5. O concurrentibus, ſit Z punctum quodcunque talis curvae, cuius ſitus determinetur per ternas coordinatas

$$OX = x,\ XY = y,\ YZ = z,$$

axibus illis parallelas, inter quas duabus aequationibus opus erit ad indolem curuae propoſitae exprimendam, quoniam pro quauis abſciſſa $OX = x$, vtraque reliquarum y et z aſſignari debet, vt punctum Z determinatum locum obtineat. Omnes autem quaeſtiones, quae circa tales curuas proponi poſſunt, in genere huc redeunt, vt primo pro quouis puncto Z poſitio tangentis reſpectu ternorum axium definiatur. Deinde vero etiam bina curuae elementa contigua conſiderari debent, quae, quatenus non in directum iacent, certum planum determinabunt, cuius poſitionem reſpectu axium, vel reſpectu ternorum planorum A O B, B O C et C O A inueſtigari oportet. Denique etiam neceſſe

ceſſe eſt, vt radius curuaturae pro talibus binis elementis exploretur, eiusque non ſolum quantitas, ſed etiam poſitio reſpectu ternorum axium aſſignetur. Euidens autem eſt, has poſteriores determinationes differentialia ſecundi gradus inuoluere, quorum repraeſentatio in figura taedioſam attentionem poſtulare ſolet.

§. 3. Ante omnia autem conueniet calculum ita exſequi, vt nulli ternorum axium prae reliquis vlla praerogatiua tribuatur, atque omnia pari modo ad vnumquemque referri queant. Hunc in finem ipſum arcum curuae, quem vocemus $= s$, tanquam praecipuam variabilem in calculum introducamus, ad eamque omnes reliquas variabiles reuocemus; ita vt omnes tanquam functiones ipſius s ſpectari queant. Hunc in finem ſtatuamus ſtatim ab initio $dx = p\,ds$, $dy = q\,ds$ et $dz = r\,ds$, vnde cum ſit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, erit $pp + qq + rr = 1$, ideoque differentiando $p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0$. Tum vero nihil impedit, quo minus elementum ds pro conſtante accipiamus, quandoquidem aequaliter ad ſingulos axes refertur, vnde nanciſcemur differentialia ſecundi gradus $ddx = dp\,ds$; $ddy = dq\,ds$ et $ddz = dr\,ds$, ſicque hoc modo differentialia ſecunda penitus euitabimus.

§. 4. Conſideremus nunc ſeorſim elementum curvae $Zz = ds$, quod quomodo ad ternos noſtros axes ſe habeat videamus. Hunc in finem ex puncto Z ducamus rectas Zp, Zq et Zr, axibus parallelas, et ipſum elementum Zz erit diagonalis parallelepipedi a ternis lateribus Tab. I. Fig. 6.

 Zp

$$Zp = dx = p\,ds,\quad Zq = dy = q\,ds \text{ et } Zr = dz = r\,ds,$$

formati; vnde patet ipſum elementum Zz ad directionem Zp ita inclinari, vt anguli zZp coſinus ſit $= p$, anguli vero zZq coſinus $= q$ et anguli zZr coſinus $= r$, vnde etiam horum angulorum ſinus definire licebit, ita vt hinc nacturi ſimus

$$\text{coſ.}\, zZp = p;\ \text{ſin.}\, zZp = \surd(1 - pp) = \surd(qq + rr);$$
$$\text{coſ.}\, zZq = q;\ \text{ſin.}\, zZq = \surd(1 - qq) = \surd(pp + rr);$$
$$\text{coſ.}\, zZr = r;\ \text{ſin.}\, zZr = \surd(1 - rr) = \surd(pp + qq).$$

Hae ergo formulae ſimul monſtrabunt poſitionem tangentis curuae in Z reſpectu ternorum axium. Scilicet iſta tangens in puncto Z inclinabitur ad axem O A angulo cuius coſ. $= p$ et ſin. $= \surd(qq + rr)$; ad axem O B angulo cuius coſinus $= q$ et ſinus $= \surd(pp + rr)$; ad axem O C angulo cuius coſinus $= r$ et ſinus $= \surd(pp + qq)$. Sicque iam primo requiſito circa poſitionem tangentium curuae reſpectu axium principalium ſatisfecimus, neque adhuc opus fuerat ad doctrinam ſphaericam confugere.

Tab. I. Fig. 7. §. 5. Concipiatur nunc ſphaera circa punctum Z deſcripta, quod quidem in figura non apparet, ad cuius ſuperficiem ducti intelligantur terni radii axibus principalibus O A, O B, O C paralleli, qui ſuperficiem ſecent in punctis a, b, c. Hoc modo, ductis circulis maximis ab, ac, bc oritur triangulum ſphaericum abc, cuius ſingula latera erunt quadrantes et anguli a, b, c recti. Tum vero ex centro Z ſecundum tangentem noſtrae curuae

uae in puncto Z educatur radius Zz in ſuperficie deſignans punctum z, vnde ſi ad angulos ducantur arcus za, zb, zc, ii metientur inclinationem tangentis Zz, ad ternos axes Za, Zb, Zc, ideoque erit

$$\text{coſ.}\, az = p;\ \text{ſin.}\, az = \sqrt{(1-pp)} = \sqrt{(qq+rr)};$$
$$\text{coſ.}\, bz = q;\ \text{ſin.}\, bz = \sqrt{(1-qq)} = \sqrt{(pp+rr)} \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\, cz = r;\ \text{ſin.}\, cz = \sqrt{(1-rr)} = \sqrt{(pp+qq)}.$$

Praeterea vero ſi arcus az, bz, cz concipiantur producti vsque ad latera oppoſita, ſinguli erunt quadrantes, vnde patet, tangentem Zz ad planum aZb ſiue ad planum AOB (*Fig.* 5.) inclinari ſub angulo cuius ſinus $= r$; ad planum autem BOC ſub angulo cuius ſinus $= p$, et ad planum AOC ſub angulo cuius ſinus $= q$. Hic quidem radium ſphaerae tanquam vnitate expreſſum ſpectamus, quod tamen non impedit, quo minus deinceps radius ipſi elemento curuae $Zz = ds$ aequalis ſtatuatur.

§. 6. Hoc modo totum noſtrum triangulum ſphaericum abc diuidetur in tria triangula ſphaerica abz, acz et bcz, in quibus dantur terna latera, vnde ex triangulo baz colligetur

$$\text{coſ.}\, baz = \frac{\text{coſ.}\, bz + \text{coſ.}\, ab\, \text{coſ.}\, az}{\text{ſin.}\, ab\, \text{ſin.}\, az} = \frac{q}{\sqrt{(qq+rr)}}.$$

Simili modo ex triangulo caz erit $\text{coſ.}\, caz = \frac{r}{\sqrt{(qq+rr)}}$.
Quia vero angulus bac eſt rectus, erit

$$\text{ſin.}\, baz = \text{coſ.}\, caz = \frac{r}{\sqrt{qq+rr}},$$

vnde ſequitur fore

$$\text{tang.}\, baz = \frac{r}{q} \text{ hincque tang.}\, caz = \frac{q}{r}.$$

Eo-

Eodem modo erit

$$\text{tang. } a\,b\,z = \frac{r}{p} \quad \text{et} \quad \text{tang. } c\,b\,z = \frac{p}{r};$$
$$\text{tang. } b\,c\,z = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \text{tang. } a\,c\,z = \frac{q}{p}.$$

§. 7. Quod ſi iam quantitates p, q et r ſuis differentialibus augeamus, perueniemus ad poſitionem ſequentis tangentis reſpectu axium fixorum. Hoc igitur facto transferatur in figura punctum z in punctum z', eritque radius $Z\,z'$ poſitio ſequentis elementi curuae, ſeu potius ſequens elementum parallelum erit huic radio $Z\,z'$, et arculus infinite paruus $z\,z'$ dabit inclinationem binorum elementorum curuae contiguorum, vnde ſtatim colligetur radius curuaturae horum elementorum. Si enim radius oſculi curuae dicatur $= R$, quoniam hinc inclinatio horum elementorum eſt $\frac{d\,s}{R}$, erit vtique $\frac{d\,s}{R} = z\,z'$, ideoque $R = \frac{d\,s}{z\,z'}$. Praeterea vero, quia ſequens elementum parallelum eſt radio $z\,z'$, dum radius $Z\,z$ refert prius elementum, ambo haec elementa ſita erunt in plano $z\,Z\,z'$, ſiue particula $z\,z'$ continuata praebebit circulum maximum cum iſto plano conuenientem, cuius ergo inclinationem ad terna plana principalia per arcus $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$ determinata aſſignare licebit.

§. 8. Ad haec expedienda vocemus arcum $a\,z = \alpha$, vt ſit $\text{coſ.}\,\alpha = p$, eritque arcus $a\,z' = \alpha + d\,\alpha$, et ducto perpendiculo $z\,s$ in arcum $a\,z'$, vt fiat $a\,s = a\,z = \alpha$, erit particula $s\,z' = d\,\alpha$; quia autem α eſt arcus cuius coſinus $= p$, erit $d\,\alpha = -\frac{d\,p}{\sqrt{(1 - p\,p)}} = -\frac{d\,p}{\sqrt{(q\,q + r\,r)}}$. Simili modo vocemus angulum $b\,a\,z = \omega$, eritque angulus $b\,a\,z' = \omega + d\,\omega$, ideoque angulus elementaris $z\,a\,z' = d\,\omega$; quia vero ω denotat angulum cuius tangens eſt $\frac{r}{q}$, erit $d\,\omega = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{q\,q + r\,r}$, qui ductus in ſinum arcus $a\,z = \sqrt{(q\,q + r\,r)}$, praebebit elemen-

mentum $zs = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{(qq + rr)}}$. Hoc igitur modo in triangulo characteriſtico ad s rectangulo $z\,s\,z'$, ob cathetos $s\,z$ et $s\,z'$ datos colligetur

$$(zz')^2 = \frac{qq\,dr^2 - 2qr\,dq\,dr + rr\,dq^2 + dp^2}{qq + rr}.$$

Quia autem eſt

$$p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0, \text{ erit}$$

$$q\,dq + r\,dr = -p\,dp \text{ ideoque}$$

$$qq\,dq^2 + 2qr\,dq\,dr + rr\,dr^2 = pp\,dp^2,$$

vnde fit

$$2qr\,dq\,dr = pp\,dp^2 - qq\,dq^2 - rr\,dr^2,$$

qui valor ſupra ſubſtitutus dabit

$$(zz')^2 = \frac{(qq + rr)\,dr^2 + (qq + rr)\,dq^2 + dp^2(1 - pp)}{qq + rr}.$$

Quia igitur eſt $1 - pp = qq + rr$, fiet

$$(zz')^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2 \text{ ideoque}$$

$$zz' = \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

§. 9. Hoc igitur elemento zz' inuento reperitur radius oſculi curuae $R = \frac{ds}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$; quare cum poſuerimus $p = \frac{dx}{ds}$, $q = \frac{dy}{ds}$, $r = \frac{dz}{ds}$, ſumto elemento ds conſtante fiet $dp = \frac{ddx}{ds}$, $dq = \frac{ddy}{ds}$, $dr = \frac{ddz}{ds}$, ſicque habebimus:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}.$$

Verum ſi nullum elementum pro conſtante habeatur, vt fiat

$$dp = \frac{ddx}{ds} - \frac{dx\,dds}{ds^2},$$

$$dq = \frac{ddy}{ds} - \frac{dy\,dds}{ds^2},$$

$$dr = \frac{ddz}{ds} - \frac{dz\,dds}{ds^2},$$

 erit

erit

$$d p^2 + d q^2 + d r^2 = \frac{d d x^2 + d d y^2 + d d z^2}{d s^2}$$

$$- \frac{2 d d s (d x d d x + d y d d y + d z d d z)}{d s^3} + \frac{d d s^2 (d x^2 + d y^2 + d z^2)}{d s^4},$$

vbi ob $d x^2 + d y^2 + d z^2 = d s^2$ et

$$d x d d x + d y d d y + d z d d z = d s d d s,$$

haec formula tranſibit in hanc:

$$\frac{d d x^2 + d d y^2 + d d z^2 - d d s^2}{d s^2},$$

atque hinc expreſſio generalis, nullo elemento pro conſtante aſſumto, pro radio oſculi erit

$$R = \frac{d s^2}{\sqrt{(d d x^2 + d d y^2 + d d z^2 - d d s^2)}},$$

quae formula per Analyſin communem demum poſt calculos maxime perplexos eſt eruta.

§. 10. Quo nunc etiam poſitionem plani, in quo bina curuae elementa proxima ſunt ſita, inueſtigemus: in triangulo characteriſtico $z z' s$ quaeratur angulus $z z' s$, atque ex omnibus eius lateribus cognitis concludimus ſequentes formulas:

$$\text{ſin.}\, z z' s = \frac{q d r - r d q}{\sqrt{(q q + r r)(d p^2 + d q^2 + d r^2)}} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, z z' s = \frac{- d p}{\sqrt{(q q + r r)(d p^2 + d q^2 + d r^2)}}, \text{ hincque}$$

$$\text{tang.}\, z z' s = \frac{r d q - q d r}{d p},$$

atque hae eaedem formulae valebunt pro angulo quem particula $z z'$ retrocontinuata cum arcu $a z$ conſtituet, quandoquidem z et z' infinite parum diſcrepant.

Tab I. Fig. 8. §. 11. Producatur nunc vtcunque elementum $z z'$ inuentum, donec latera noſtri trianguli $a b c$ ſecet in punctis

ctis q, r et p, et modo vidimus, ſi angulum $a z r$ vocemus $= \Phi$, fore

$$\text{ſin. } \Phi = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd (q\,q + r\,r)(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)};$$

$$\text{coſ. } \Phi = \frac{-d\,p}{\surd (q\,q + r\,r)(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)} \text{ et}$$

$$\text{tang. } \Phi = \frac{r\,d\,q - q\,d\,r}{d\,p},$$

atque hinc definiri oportet primo ipſa puncta p, q, r, vbi iſte arcus terna latera noſtri trianguli ſecat, deinde etiam angulos, quos ille in his punctis cum lateribus conſtituit. Quo hoc facilius expediri poſſit, ex puncto a in arcum $q\,r\,p$ ducamus arcum $a\,m$, qui productus lateri $b\,c$ occurrat in n, et in triangulo rectangulo $a\,z\,m$ cum latere $a z$ datur angulus $a\,z\,m$, vnde inuenitur

$$\text{ſin. } a\,m = \text{ſin. } a\,z \text{ ſin. } a\,z\,m = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd (d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)} \text{ et}$$

$$\text{tang. } z\,m = \text{tang. } a\,z \text{ coſ. } a\,z\,m = \frac{d\,p}{p\surd (d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

denique erit

$$\text{tang. } z\,a\,m = \frac{1}{\text{coſ. } a\,z \text{ tang. } a\,z\,m} = \frac{d\,p}{p(q\,d\,r - r\,d\,q)}.$$

Supra autem vidimus eſſe tang. $z\,a\,b = \frac{r}{q}$, vnde fit tangens ſummae horum angulorum, ſeu

$$\text{tang. } b\,a\,m = \frac{p\,r(q\,d\,r - r\,d\,q) + q\,d\,p}{p\,q(q\,d\,r - r\,d\,q) - r\,d\,p},$$

cuius numerator ob $r\,d\,r = -p\,d\,p - q\,d\,q$, reducitur ad hanc formam: $(q\,q + r\,r)(q\,d\,p - p\,d\,q)$, denominator vero ad hanc $(q\,q + r\,r)p\,d\,r - r\,d\,p)$, vnde fit

$$\text{tang. } b\,a\,m = \frac{q\,d\,p - p\,d\,q}{p\,d\,r - r\,d\,p},$$

et quia angulus $b\,a\,c$ eſt rectus, erit

$$\text{tang. } m\,a\,c = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{q\,d\,p - p\,d\,q}.$$

§. 12. Quia nunc arcus *a n* eſt quadrans circuli et arcui *b c* normaliter inſiſtit, erit

$$\operatorname{coſ.} m n = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

vnde quia ambo arcus *m p* et *n p* eidem arcui *m n* normaliter inſiſtunt, ambo erunt quadrantes et arcus *m n* erit menſura anguli *m p n*, ſicque erit

$$\operatorname{coſ.} m p n = \operatorname{coſ.} q p c = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

atque ſub hoc angulo planum quaeſitum inclinatur ad planum *b c*, ſiue in quinta figura ad planum B O C. At vero arcus *a m* metietur angulum, ſub quo illud planum ad axem O A inclinatur, cuius ergo ſinus erit

$$\operatorname{ſin.} a m = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}.$$

§. 13. Inuento autem angulo *z p b*, quo planum quaeſitum ad planum *b c* inclinatur, per analogiam concludemus angulos, ſub quibus ad reliqua bina latera inclinatur, ſcilicet coſinus inclinationis ad planum *b c*, hoc eſt ad planum C A, erit

$$= \frac{r\,d\,p - p\,d\,r}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

et coſinus inclinationis ad planum A B

$$= \frac{p\,d\,q - q\,d\,p}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}.$$

At analogiam ſequentes, quia prima formula erat coſ. *c p z* ſecundum ordinem litterarum *a*, *b*, *c* et *p*, *q*, *r* progrediendo, quoniam in poſtremis formulis dubium eſſe poteſt, an pertineant ad angulos *a q z* et *a r z*, an potius ad angulos *p q z* et *b r z*, ambiguitas tolletur hoc modo

$$\operatorname{coſ.} c p z = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{\surd(d\,p^2 + d\,q + d\,r^2)}:$$

coſ.

$$\text{coſ.}\, a\,q\,z = \frac{r\,d\,p - p\,d\,r}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

$$\text{coſ.}\, b\,r\,z = \frac{p\,d\,q - q\,d\,p}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

Interim tamen analogiae confidere non poſſumus, quia punctum p extra noſtrum triangulum cadit, vnde inueſtigationem ſequenti modo inſtituamus.

§. 14. Omni ambiguitati occurremus, ſi reſoluamus triangulum $a\,z\,r$, in quo cognita ſunt latus $a\,z$, cum angulis $z\,a\,r$ et $a\,z\,r$, vnde fiet

$$\text{coſ.}\, a\,r\,z = \frac{p\,q\,r\,d\,r - p\,r\,r\,d\,q + q\,d\,p}{q\,q + r\,r\,\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

quae expreſſio ob $r\,d\,r = -p\,d\,p - q\,d\,q$ transmutatur in hanc:

$$\text{coſ.}\, a\,r\,z = \frac{q\,d\,p - p\,d\,q}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}.$$

Praeterea vero etiam hinc cognoſcemus

$$\text{tang.}\, a\,r = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{p\,d\,r - r\,d\,p} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, z\,r = \frac{r\,\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}{d\,r}.$$

§. 15. Simili modo reſolui poterit triangulum $z\,a\,q$, in quo praeter latus $a\,z$ pariter dantur ambo anguli $z\,a\,q$ et $a\,z\,q$: reperitur enim

$$\text{coſ.}\, a\,q\,z = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)},$$

$$\text{tang.}\, a\,q = \frac{q\,d\,r - r\,d\,q}{q\,d\,p - p\,d\,q} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, q\,z = \frac{q\,\surd(d\,p^2 + d\,q^2 + d\,r^2)}{-d\,q}.$$

Denique iam vidimus arcum $c\,n$ eſſe menſuram anguli $c\,a\,m$, et quia arcus $c\,b$ et $n\,p$ ſunt quadrantes, erit arcus $b\,p = c\,n$, vnde erit

$$\text{tang.}\, b\,p = \text{tang.}\, m\,a\,c = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{q\,d\,r - r\,d\,q},$$

vnde porro fit

$$\text{tang.}\, c\,p = \frac{r\,d\,p - q\,d\,r}{p\,d\,r - r\,d\,p}.$$

§. 16. Quae igitur hactenus inuenimus ſequenti modo aſpectui exponamus; ac primo quidem pro angulis, quae ex punctis p, q, r formantur, habebimus:

$$\text{coſ.}\, b\,p\,z = \text{coſ.}\, c\,p\,z = \frac{q\,dr - r\,dq}{\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)},$$

$$\text{coſ.}\, c\,q\,z = -\,\text{coſ.}\, a\,q\,z = \frac{r\,dp - p\,dr}{\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)},$$

$$\text{coſ.}\, a\,r\,z = -\,\text{coſ.}\, b\,r\,z = \frac{q\,dp - p\,dq}{\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)}.$$

Deinde pro poſitione ipſorum punctorum p, q, r habebimus:

$$\text{tang.}\, b\,p = \frac{p\,dr - r\,dp}{q\,dr - r\,dq};\quad \text{tang.}\, c\,p = \frac{r\,dq - q\,dr}{p\,dr - r\,dp},$$

$$\text{tang.}\, c\,q = \frac{q\,dp - p\,dq}{q\,dr - r\,dq};\quad \text{tang.}\, a\,q = \frac{q\,dr - r\,dq}{q\,dp - p\,dq},$$

$$\text{tang.}\, a\,r = \frac{q\,dr - r\,dq}{p\,dr - r\,dp};\quad \text{tang.}\, b\,r = \frac{p\,dr - r\,dp}{q\,dr - r\,dq}.$$

Euidens autem eſt, ſi ducerentur arcus pa, qb et rc, eos fore quadrantes. Denique arcus pz commode reperitur ex triangulo azp, in quo latus ap eſt quadrans, ac praeterea datur latus az, vna cum angulis azp et zpa, quippe cuius ſinus coſinui zpb aequatur, vnde reperitur:

$$\text{tang.}\, p\,z = \frac{p\,\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{dp},$$

iam vero erat

$$\text{tang.}\, q\,z = -\,\frac{q\,\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{dq},$$

$$\text{tang.}\, r\,z = \frac{r\,\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{dr}.$$

§. 17. Inuentis nunc omnibus, quae ad poſitionem plani, in quo bina curuae elementa contigua incuruantur, et quod circulo maximo $qzrp$ continetur, ſpectant, etiam in poſitionem radii oſculi, cuius quantitatem iam inuenimus, inquiramus, qui quoniam ad radium Zz eſt normalis et in ipſo plano circuli $qzrp$ ſitus, eius poſitio tangenti

genti huius circuli in z erit parallela et, quia ipſi centro ſphaerae Z applicatus eſt cenſendus, ductus concipiatur ex centro Z radius tangenti circuli in z parallelus atque in eius directione ſitus erit radius oculi.

§. 18. Tranſeat igitur iſte radius Sphaerae, tangenti in z parallelus, per punctum R, quod vtique ſitum erit in circulo $p\,r\,q$ continuato, ac manifeſtum eſt arcum $z\,r$ fore quadrantem. Hinc ductus arcus $a\,r$ metietur inclinationem radii oſculi ad axem $Z\,a$, ſiue ad axem OA, quem arcum ex triangulo $a\,z\,R$ definire licebit, cum ſit $z\,R = 90°$ et angulus $R\,z\,a = 180° - \Phi$, latus autem $a\,z$ detur, vnde colligitur Tab. II. Fig. 1.

$$\text{coſ.}\; a\,R = \frac{dp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$

tum vero erit

$$\text{tang.}\; z\,a\,R = \frac{r\,dq - q\,dr}{p\,dp}.$$

Hinc aufferatur angulus $z\,a\,q$, cuius tang. $= \frac{q}{r}$, ac remanebit tang. $q\,a\,R = -\frac{dq}{dr}$, vnde ſi ducatur arcus $c\,R$, in triangulo $R\,a\,c$ dantur duo latera $a\,c$ et $a\,R$ cum angulo intercepto, vnde colligitur

$$\text{coſ.}\; c\,R = \text{ſin.}\; a\,R\; \text{coſ.}\; q\,a\,R = \frac{dr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

Eademque modo reperietur

$$\text{coſ.}\; b\,R = -\frac{dq}{\sqrt{(dp^2 + dp^2 + dr^2)}}.$$

Cognitis autem angulis, ſub quibus radius oſculi ad ternos axes principales OA, OB, OC, inclinatur, eorum complementa ad 90° dabunt eius inclinationes ad plana oppoſita, ſcilicet BOC, AOC, AOB. Sicque poſitio radii oſculi

oſculi, cuius quantitas eſt $= \frac{ds}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$, perfecte determinatur.

§. 19. Hae autem determinationes adhuc faciliores reddi poſſunt, ſi, quemadmodum inclinationem circuli $q\,z\,r$ ad arcum $a\,z$ dedimus, eiusdem quoque inclinationem ad arcus $b\,z$ et $c\,z$ definiamus. Hunc in finem quaeramus angulum $a\,z\,b$, et ex triangulo $a\,z\,b$, quatenus tria laterae ſunt cognita, erit

$$\text{coſ.}\ a\,z\,b = \frac{-pq}{\sqrt{(1-pp)(1-qq)}}.$$

Deinde ſi fiat in eodem triangulo

$$\text{ſin.}\ a\,z : \text{ſin.}\ a\,b\,z = \text{ſin.}\ a\,b : \text{ſin.}\ a\,z\,b,$$

inde colligitur:

$$\text{ſin.}\ a\,z\,b = \frac{r}{\sqrt{(1-pp)(1-pp)}},$$

hincque porro tang. $a\,z\,b = -\frac{r}{pq}$. Eodem modo erit

$$\text{coſ.}\ b\,z\,c = \frac{-qr}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}} \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\ b\,z\,c = \frac{p}{\sqrt{(1-qq)(1-rr)}},$$

hincque tang. $b\,z\,c = \frac{-p}{qr}$. Ac denique

$$\text{coſ.}\ c\,z\,a = \frac{-pr}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$

$$\text{ſin.}\ c\,z\,a = \frac{q}{\sqrt{(1-pp)(1-rr)}},$$

hincque tang. $c\,z\,a = \frac{-q}{pr}$.

§. 20. Quoniam igitur ſupra inuenimus eſſe

$$\text{coſ.}\ a\,z\,r = \frac{-dp}{\sqrt{(qq+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},$$

$$\text{ſin.}\ a\,z\,r = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{(qr+rr)(dp^2+dq^2+dr^2)}},$$

$$\text{tang.}\ a\,z\,r = \frac{r\,dq - q\,dr}{dp},$$

ſubtra-

ſubtrahamus hunc angulum azr ab angulo azb, ac reperiemus

$$\text{tang. } bzr = \frac{-rdp - pqrdq + pqqdr}{pqdp - rrdq + qrdr} = \frac{rdp - pdr}{dq}.$$

Eodem modo cum ſit

$$\text{tang. } azq = \frac{qdr - rdq}{dp},$$

ſubtrahatur iſte angulus ab angulo azc, cuius tangens eſt $\frac{-q}{pr}$, ac reperietur

$$\text{tang. } czq = \frac{-qdp - pqrdr + prrdq}{prdp - qqdr + qrdq} = \frac{qdp - pdq}{dr}.$$

§. 21. Quoniam igitur omnia determinauimus, quae ad poſitionem tam plani, in quo duo elementa proxima curuae inclinantur, quam radii oſculi ſpectant, atque adeo multo vberius quam per methodum comunem fieri ſolet, coronidis loco ſubiungamus quaedam theoremata ad doctrinam ſphaericam pertinentia, ad quae iſta tractatio perduxit et quae omni attentione digna videntur.

Theorema I.

§. 22. *Propoſito triangulo ſphaerico* abc, *cuius omnia latera ſunt quadrantes, ſi vel intra id vel extra capiatur punctum quodcunque* z, *ex eoque ad angulos trianguli educantur arcus* za, zb, zc, *ſemper erit* Tab II. Fig. 2

$$\text{coſ. } za^2 + \text{coſ. } zb^2 + \text{coſ. } zc^2 = 1.$$

Demonſtratio.

Ex triangulo azb, ſi eius latera vt cognita ſpectentur, reperitur

$$\text{coſ. } baz = \frac{\text{coſ. } bz}{\text{ſin. } az};$$

eodem modo ex triangulo *azc* erit

$$\text{coſ. } caz = \frac{\text{coſ. } cz}{\text{ſin. } az},$$

vnde quia angulus *bac* eſt rectus, ſi quadrata addantur prodit

$$\text{coſ. } baz^2 + \text{coſ. } caz^2 = 1 = \frac{\text{coſ. } bz^2 + \text{coſ. } cz^2}{\text{ſin. } az^2},$$

ideoque

$$\text{ſin. } az^2 = \text{coſ. } bz^2 + \text{coſ. } cz^2 = 1 - \text{coſ. } az^2,$$

vnde manifeſto fit

$$\text{coſ. } az^2 + \text{coſ. } bz^2 + \text{coſ. } cz^2 = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

Theorema II.

Tab. II. Fig. 2. §. 23. *Propoſito triangulo ſphaerico* a b c, *cuius omnia latera ſint quadrantes, ſi intra vel extra id capiatur punctum quodcunque* z, *ex eoque in ſingula latera ducantur arcus perpendiculares* z p, z q, z r, *ſemper erit*

$$\text{ſin. } zp^2 + \text{ſin. } zq^2 + \text{ſin. } zr^2 = 1.$$

Demonſtratio.

Euidens eſt haec perpendicula oriri, ſi praecedentes arcus *az*, *bz*, *cz* continuentur, vnde quia arcus *ap*, *bq*, *cr* ſunt quadrantes erit

$$\text{ſin. } zp^2 = \text{coſ. } za^2,$$

$$\text{ſin. } zq^2 = \text{coſ. } zb^2 \text{ et}$$

$$\text{ſin. } zr^2 = \text{coſ. } zc^2;$$

quare cum modo inuenerimus

$$\text{coſ. } za^2 + \text{coſ. } zb^2 + \text{coſ. } zc^2 = 1, \text{ erit vtique}$$

$$\text{ſin. } zp^2 + \text{ſin. } zq^2 + \text{ſin. } zr^2 = 1. \quad \text{Q. E. D.}$$

Theo-

Theorema III.

§. 24. *Propoſito triangulo ſphaerico* abc, *cuius omnia latera ſint quadrantes, ſi ducatur circulus maximus quicunque* $\beta\gamma\alpha$, *qui ſecet latera trianguli, ſi opus eſt producta, in punctis* α, β, γ, *is ad haec latera ita inclinabitur, vt ſit* Tab. II. Fig. 3.

$$\text{coſ.}\, b\alpha\gamma^2 + \text{coſ.}\, a\beta\gamma^2 + \text{coſ.}\, a\gamma\beta^2 = 1.$$

Demonſtratio.

In triangulo $\beta a\gamma$, ad a rectangulo, erit

$$\text{coſ.}\, a\beta\gamma = \text{ſin.}\, a\beta\gamma\, \text{coſ.}\, a\gamma;$$

ſimilique modo in triangulo $b\alpha\gamma$, ad b rectangulo, erit

$$\text{coſ.}\, b\alpha\gamma = \text{ſin.}\, b\gamma\alpha\, \text{coſ.}\, b\gamma.$$

Addantur nunc quadrata harum duarum formularum eritque

$$\text{coſ.}\, b\alpha\gamma^2 + \text{coſ.}\, a\beta\gamma^2 = \text{ſin.}\, a\gamma\beta^2\, \text{coſ.}\, a\gamma^2 + \text{ſin.}\, b\gamma\alpha^2\, \text{coſ.}\, b\gamma^2,$$

et quia

$$b\gamma\alpha = a\gamma\beta \text{ et } \text{coſ.}\, a\gamma^2 + \text{coſ.}\, b\gamma^2 = 1,$$

erit

$$\text{coſ.}\, b\alpha\gamma^2 + \text{coſ.}\, a\beta\gamma^2 = \text{ſin.}\, a\gamma\beta^2 = 1 - \text{coſ.}\, a\gamma\beta^2,$$

vnde ſequitur, quod demonſtrari debet, fore

$$\text{coſ.}\, b\alpha\gamma^2 + \text{coſ.}\, a\beta\gamma^2 + \text{coſ.}\, a\gamma\beta^2 = 1.$$

Theorema IV.

§. 25. *Propoſito triangulo ſphaerico* abc, *cuius ſingula latera ſint quadrantes, ſi pro lubitu ducatur arcus circuli maximi quicunque* $\alpha\beta\gamma$, *in eumque ex angulis* abc *ducantur arcus perpendiculares* ap, bq, cr *ſemper erit*

$$\text{ſin.}\, ap^2 + \text{ſin.}\, bq^2 + \text{ſin.}\, cr^2 = 1.$$

Demonſtratio.

Ducantur arcus αa, βb et γc, qui erunt quadrantes, quoniam omnes arcus ex a in latus $b\,c$ ducti ſunt quadrantes, ac praeterea etiam normaliter inſiſtunt. Hinc quia anguli ad p, q et r ſunt etiam recti, erunt quoque arcus αp, βq et γr quadrantes, vnde ſequitur fore arcum $ap =$ angulo $a\,\alpha\,p$, ideoque

$$\text{ſin.}\, ap = \text{ſin.}\, a\,\alpha\,p = \text{coſ.}\, b\,\alpha\,\gamma.$$

Eodem modo erit $b\,q = b\,\beta\,q$, ideoque

$$\text{ſin.}\, b\,q = \text{ſin.}\, b\,\beta\,q = \text{coſ.}\, a\,\beta\,\gamma;$$

denique erit $c\,r = c'\,\gamma\,r$ hincque

$$\text{ſin.}\, c\,r = \text{ſin.}\, c\,\gamma\,r = \text{coſ.}\, a\,\gamma\,\beta.$$

Quare cum ſumma quadratorum horum coſinuum ſit $= 1$, erit quoque

$$\text{ſin.}\, ap^2 + \text{ſin.}\, bq^2 + \text{ſin.}\, cr^2 = 1.\ \text{Q. E. D.}$$

METHODVS FACILIS OMNIA SYMPTOMATA LINEARVM CVRVARVM NON IN EODEM PLANO SITARVM INVESTIGANDI.

Diſſertatio altera.

§. 1.

Quod ſi forte methodus ante tradita et doctrinae ſphaericae innixa minus placeat, vtpote ex principiis alienis deducta; aliam hic ſum propoſiturus methodum, ex principio magis directo petitam, qua omnia ſymptomata linearum curuarum non in eodem plano ſitarum etiam multo ſuccinctius et clarius demonſtrari poſſunt quam methodo hactenus vſitata. Hanc autem methodum mihi ſuppeditauit conſideratio illius plani, in quo bina curuae elementa contigua ſunt ſita, et in quo proinde tam tangens curuae quam eius radius curuaturae exiſtere debent; vnde totam inueſtigationem ex conſideratione huius plani ſum petiturus.

Tab. II. Fig. 4. §. 2. Conſtitutis igitur vt ante ternis axibus principalibus OA, OB, OC, quibus coordinatae, quoduis punctum curuae z determinantes, ſint parallelae, ſcilicet

$$Ox = x,\ xy = y,\ yz = z,$$

ſtatim in calculum introducam illud planum, quod per bina curuae elementa contigua determinatur, ſiue in quo curua hoc loco incuruatur. Secet igitur iſtud planum ternos noſtros axes in punctis u, v et w, ac ponamus diſtantias $Ou = u$, $Ov = v$, $Ow = w$, quandoquidem his tribus quantitatibus poſitio plani penitus determinatur. Quatenus igitur curuae punctum z in hoc ipſo plano reperitur, aequatio inter ternas coordinatus x, y, z erit vnius dimenſionis, huius formae, $Ax + By + Cz = D$, ad quam penitus determinandam transferamus primo punctum z in ipſum punctum u fietque $x = u$, $y = 0$ et $z = 0$, vnde erit $Au = D$. Simili modo, translato puncto z in ipſum punctum v, fiet $x = 0$, $y = v$, $z = 0$, vnde erit $Bv = D$. Denique translato puncto z in ipſum punctum w, erit $z = w$, $x = 0$, $y = 0$, vnde erit $Cw = D$. Cum igitur hinc ſit

$$A = \frac{D}{u},\ B = \frac{D}{v},\ C = \frac{D}{w},$$

erit aequatio localis pro plano uvw haec:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

§. 3. Quod ſi nunc vt ante elementum curuae ſtatuatur $= ds$, ac per hoc elementum reliqua ita definiantur, vt ſit

$$dx = p\,ds,\ dy = q\,ds,\ dz = r\,ds,$$

erit vtique $pp + qq + rr = 1$, ac differentiando

$p\,dp$

$$p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0.$$

Transferatur nunc punctum curuae z in proximum, cui reſpondeant coordinatae $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, quoniam iſtud punctum proximum denuo in plano $u\,v\,w$ eſt ſitum, erit etiam

$$\frac{x + dx}{u} + \frac{y + dy}{v} + \frac{z + dz}{w} = 1,$$

a qua aequatione ſi prior ſubtrahatur, habebimus:

$$\frac{dx}{u} + \frac{dy}{v} + \frac{dz}{w} = 0, \text{ ideoque } \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0.$$

Denique quia etiam ſequens elementum in idem planum incidere debet, erit etiam denuo differentiando

$$\frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 0.$$

Vlterius vero differentiando progredi non licet, quia ſequentia elementa vtique in aliud planum incidere poſſunt.

§. 4. Conſideratio igitur iſtius plani $u\,v\,w$ cum indole curuae coniuncta nobis ſuppeditauit has tres aequationes:

$$\text{I. } \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

$$\text{II. } \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0.$$

$$\text{III. } \frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 0.$$

ex quibus aequationibus viciſſim ternas quantitates u, v et w per coordinatas curuae earumque differentialia determinare poterimus. Hunc in finem adhibeamus hanc combinationem: II. dr — III. r, quae nobis praebebit

$$\frac{p\,dr - r\,dp}{u} + \frac{q\,dr - r\,dq}{v} = 0, \text{ ſiue}$$

$$\frac{p\,dr - r\,dp}{u} = \frac{r\,dq - q\,dr}{v},$$

vnde

vnde deducitur haec proportio:

$$\frac{1}{u} : \frac{1}{v} = (r\,d\,q - q\,d\,r) : (p\,d\,r - r\,d\,p).$$

Statuamus igitur

$$\frac{1}{u} = \frac{r\,d\,q - q\,d\,r}{t}, \text{ erit } \frac{1}{v} = \frac{p\,d\,r - r\,d\,p}{t},$$

qui valores in ſecunda aequatione ſubſtituti dant

$$r\frac{(p\,d\,q - q\,d\,p)}{t} + \frac{r}{w} = 0, \text{ vnde colligimus}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{q\,d\,p - p\,d\,q}{t}.$$

§. 5. Ex his autem valoribus pro $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ inuentis, ſi ii in prima aequatione ſubſtituantur, perueniemus ad hanc aequationem:

$$x(r\,d\,q - q\,d\,r) + y(p\,d\,r - r\,d\,p) + z(q\,d\,p - p\,d\,q) = t,$$

quae nobis igitur valorem quantitatis t exhibet, ita vt deinceps hac littera t tanquam cognita vti queamus, vbi quidem neceſſe erit valores formularum $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ in calculum introducere.

Tab. II. Fig. 5. §. 6. Nunc igitur determinata poſitione plani $u\,v\,w$ inueſtigemus eius inclinationem ad terna noſtra plana principalia A O B, B O C, C O A. Ac primo quidem quia iſtud planum ſecat planum A O B per lineam $u\,v$, quae eſt $= \sqrt{(u\,u + v\,v)}$, ex O ducatur in hanc $u\,v$ perpendiculum O r, eritque $u\,r : \mathrm{O}\,u = \mathrm{O}v : \mathrm{O}\,r$, vnde fit $\mathrm{O}\,r = \frac{u\,v}{\sqrt{(u\,u + v\,v)}}$. Iungatur nunc recta $r\,w$, et quia triangulum O $w\,r$ eſt verticale, recta $w\,r$ quoque normalis erit ad rectam $u\,v$, vnde angulus O $r\,w$ dabit inclinationem plani $u\,v\,w$ ad planum A O B; quare cum angulus $w\,\mathrm{O}\,r$ ſit rectus et O $w = w$, erit hypothenuſa

$r\,w$

$$r w = \sqrt{\left(\frac{u u v v + u u w w + v v w w}{u u + v v}\right)},$$

ex qua colligimus

$$\text{coſ.}\, O r w = \frac{O r}{r w} = \frac{u v}{\sqrt{(u u v v + u u w w + v v w w)}}, \text{ ſiue}$$

$$\text{coſ.}\, O r w = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{w w}{u u} + \frac{w w}{v v}\right)}} = \frac{1}{w \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}.$$

Sicque innoteſcit inclinatio plani $u v w$ ad planum A O B, quippe cuius coſinus eſt $\frac{1}{w \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}$. Simili modo per analogiam concluditur inclinatio plani $u v w$ ad planum B O C, cuius coſinus eſt $\frac{1}{u \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}$; ac denique inclinatio plani $u v w$ ad planum C O A, cuius coſinus eſt $\frac{1}{v \sqrt{\left(\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w}\right)}}$.

§. 7. Cum igitur ſit

$$\frac{1}{u} = \frac{r\,d q - q\,d r}{t},$$

$$\frac{1}{v} = \frac{p\,d r - r\,d p}{t} \text{ et}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{q\,d p - p\,d q}{t}, \text{ erit}$$

$$\frac{1}{u u} + \frac{1}{v v} + \frac{1}{w w} = \frac{d p^2 (q q + r r) + d q^2 (p p + r r) + d r^2 (p p + q q)}{t t}$$
$$- \frac{2 p q\,d p\,d q - 2 p r\,d p\,d r - 2 q r\,d q\,d r}{t t},$$

quia vero eſt

$$q q + r r = 1 - p p; \quad p p + r r = 1 - q q \text{ et}$$
$$p p + q q = 1 - r r,$$

 his

his valoribus ſubſtitutis formula iſta in duas partes diſtribuetur, alteram poſitiuam, alteram negatiuam; ac poſitiua quidem erit $\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{tt}$, termini vero negatiui erunt

$$\frac{-ppdp^2 - qqdq^2 - rrdr^2 - 2pqdpdq - 2prdpdr - 2qrdqdr}{tt},$$

quae forma cum manifeſto ſit quadratum huius formulae: $\frac{pdp + qdq + rdr}{t}$, ea ob

$$pdp + qdq + rdr = 0,$$

ſponte euaneſcit, ita vt habeamus:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{uu} + \frac{1}{vv} + \frac{1}{ww}\right)} = \sqrt{\left(\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{t}\right)},$$

quamobrem inclinationes ſupra inuentae ita ſuccincte exprimentur:

I. coſ. incl. ad planum A O B $= \frac{qdp - pdq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$.

II. coſ. incl. ad planum B O C $= \frac{rdq - qdr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$.

III. coſ. incl. ad planam C O A $= \frac{pdr - rdp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}$.

Sicque iam praecipua ſymptomata ſumus nacti, quae praecedente methodo demum poſt plures ambages ſunt eruta.

§. 8. Quo nunc etiam reliqua ſymptomata facilius eliciamus, ponamus breuitatis gratia angulum $Ouv = \alpha$ atque habebimus

$$\text{ſin.}\,\alpha = \frac{v}{\sqrt{(uu + vv)}},\quad \text{coſ.}\,\alpha = \frac{u}{\sqrt{(uu + vv)}} \text{ et tang.}\,\alpha = \frac{v}{u}.$$

Deinde ponatur inclinatio ſeu angulus $Orw = \theta$, eritque

$$\text{ſin.}\,\theta = \frac{Ow}{rw} = \frac{w\sqrt{(uu + vv)}}{\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}},$$

$$\text{coſ.}\,\theta = \frac{Or}{rw} = \frac{uv}{\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{w\sqrt{(uu + vv)}}{uv},$$

vbi

vbi notandum eſt hos valores manere conſtantes, dum a puncto curuae z per duo elementa ſequentia progredimur.

§. 9. His praemiſſis inueſtigemus locum puncti z in ipſo plano $u\,v\,w$, et cum ſit $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$, ex punctis x et y ad rectam uv ducamus perpendicula xp et yq, et quoniam $xu = u - x$ et angulus $xup = \alpha$, erit $xp = (u - x)$ ſin. α et $up = (u - x)$ coſ. α. Tum vero ex y in xp demiſſo perpendiculo yo, erit $yo = y$ ſin. α et $xo = y$ coſ. α. Quare cum ſit $pq = yo$ et $yq = po$, fiet interuallum Tab II Fig. 4.

$$uq = (u - x)\,\text{coſ.}\,\alpha + y\,\text{ſin.}\,\alpha \text{ et}$$
$$yq = (u - x)\,\text{ſin.}\,\alpha - y\,\text{coſ.}\,\alpha.$$

Nunc igitur quia $yz = z$ eſt verticalis, ducta recta qz triangulum yzq non ſolum plano AOB normaliter inſiſtit, ſed etiam rectae yq et zq ad rectam uv erunt perdiculares, et angulus yqz ipſi inclinationi θ aequabitur, vnde erit recta

$$qz = \frac{(u - x)\,\text{ſin.}\,\alpha - y\,\text{coſ.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\theta},$$

vel etiam erit

$$qz = \frac{yz}{\text{ſin.}\,\theta} = \frac{z}{\text{ſin.}\,\theta},$$

vnde has duas formulas aequales eſſe neceſſe eſt, ex quo ſequitur fore

$$\frac{z\sqrt{(uu\,vv + uu\,ww + vv\,ww)}}{w\sqrt{(uu + vv)}} = \frac{(u-x)\,\text{ſin.}\,\alpha - y\,\text{coſ.}\,\alpha)\sqrt{(uu\,vv + uu\,ww + vv\,ww)}}{uv},$$

ſiue

$$\frac{z}{w\sqrt{(uu + vv)}} = \frac{(u - x)\,v - uy}{uv\sqrt{(uu + vv)}},$$

quae aequatio reducitur ad hanc: $\frac{z}{w} = \frac{(u - x)}{u} - \frac{y}{v}$, quae eſt

ipſa

ipſa aequatio primo conſtituta, ſcilicet

$$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=1.$$

§. 10. Quoniam igitur recta zq in ipſo plano uvw ad rectam uv eſt normalis, in hoc plano pro puncto z ſpectemus rectam uq tanquam abſciſſam et qz tanquam applicatam, et vocemus $uq=X$ et $qz=Y$, quocirca habebimus

$$X=(u-x)\,\text{coſ.}\,\alpha+y\,\text{ſin.}\,\alpha \text{ et}$$

$$Y=\frac{(u-x)\,\text{ſin.}\,\alpha-y\,\text{coſ.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\theta}=\frac{z}{\text{coſ.}\,\theta}.$$

Quae quo clarius perſpici queant, hoc planum uvw cum puncto z ſeorſim in tabulam coniiciamus.

Tab. II. Fig. 6. §. 11. Nunc igitur differentiando per elementum curuae zz' progrodiamur, atque ob

$$dx=p\,ds,\; dy=q\,ds \text{ et } dz=r\,ds,$$

quoniam quantitates u, v, w, cum angulis α et θ manent conſtantes, erit

$$dX=-p\,ds\,\text{coſ.}\,\alpha+q\,ds\,\text{ſin.}\,\alpha \text{ et}$$

$$dY=-\frac{p\,ds\,\text{ſin.}\,\alpha-q\,ds\,\text{coſ.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\theta}=\frac{r\,ds}{\text{ſin.}\,\theta},$$

quos duos valores ipſius dY pariter aequales eſſe neceſſe eſt, ideoque erit

$$-\frac{p\,\text{ſin.}\,\alpha-q\,\text{coſ.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\theta}=\frac{r}{\text{ſin.}\,\theta},$$

quae aequatio, ſubſtitutis valoribus, tranſit in hanc:

$$\frac{p}{u}+\frac{q}{v}+\frac{r}{w}=0,$$

quae eſt ipſa aequatio ſecunda initio conſtituta. Praeterea, cum poſuerimus elementum curuae $=ds$, quod nunc ex

ex coordinatis X et Y fit $ds = \sqrt{(dX^2 + dY^2)}$, neceſſe eſt vt euadat $dX^2 + dY^2 = ds^2$. Eſt vero

$$dX = \frac{ds(qv - pu)}{\sqrt{(uu + vv)}} \text{ et}$$

$$dY = -\frac{ds(pv + qu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv\sqrt{(uu + vv}},$$

vel etiam

$$dY = \frac{r\,ds\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{w(\sqrt{uu + vv})}.$$

Hinc autem erit

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = \frac{uuvv(qqvv - 2pquv + ppuu) + (ppvv + 2pquv) + qquu(qqau + uuww + vvww)}{uuvv(uu + vv)},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = \frac{pp(uu + ww)}{uu} + \frac{qq(vv + ww)}{vv} + \frac{2pqww}{uv}$$

$$= (pp + qq) + ww\left(\frac{p}{u} + \frac{q}{v}\right)^2.$$

Cum autem ſit $\frac{p}{u} + \frac{q}{v} = -\frac{r}{w}$, reſultabit haec forma:

$$\frac{dX^2 + dY^2}{ds^2} = pp + qq + rr = 1.$$

Sicque patet, reuera eſſe $dX^2 + dY^2 = ds^2$.

§. 12. Quod ſi iam ſtatuamus $dY = P\,dX$, notum eſt radium oſculi curuae, quatenus cadet in rectam $zN\Omega$, eſſe $z\Omega = -\frac{dX(1 + PP)^{\frac{3}{2}}}{dP}$, ita vt Ω ſit centrum circuli noſtram curuam in z oſculantis. Modo autem vidimus reuera fieri $dX\sqrt{(1 + PP)} = ds$, vnde cum ſit $dX = \frac{ds(qv - pu)}{\sqrt{uu + vv}}$, erit

$$\sqrt{(1 + PP)} = \frac{ds}{dX} = \frac{\sqrt{(uu + vv)}}{qv - pu}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + PP)}} = \frac{qv - pu}{\sqrt{(uu + vv)}},$$

vnde differentiando colligimus:

$$-\frac{P\,dP}{(1+PP)^{\frac{3}{2}}}=\frac{v\,dq-u\,dp}{\surd(uu+vv)},$$

vnde deducitur

$$(1+PP)^{\frac{3}{2}}=\frac{P\,dP\surd(uu+vv)}{u\,dp-v\,dq},$$

atque hinc expreſſio pro radio oſculi erit

$$z\,\Omega=\frac{P\,dX\surd(uu+vv)}{v\,dq-u\,dp}=\frac{dY\surd(uu+vv)}{v\,dq-u\,dp},$$

ac loco dY ſubſtituto valore obtinebitur tandem radius oſculi

$$z\,\Omega=\frac{ds(pv+qu)\surd(uuvv+uuww+vvww)}{uv(u\,dp-v\,dq)}.$$

§. 13. Quo nunc hanc expreſſionem radii oſculi ab elementis u, v et w liberemus, diuidamus numeratorem et denominatorem ſeorſim per uvw, et obtinebimus numeratorem

$$=ds(pv+qu)\surd\left(\tfrac{1}{uu}+\tfrac{1}{vv}+\tfrac{1}{ww}\right),$$

denominator vero erit $\frac{u\,dp-v\,dq}{w}$. Supra autem iam oſtendimus eſſe

$$\surd\left(\tfrac{1}{uu}+\tfrac{1}{vv}+\tfrac{1}{ww}\right)=\frac{\surd(dp^2+dq^2+dr^2)}{t},$$

vnde fit numerator

$$=ds\left(\tfrac{pv}{t}+\tfrac{qu}{t}\right)\surd(dp^2+dq^2+dr^2).$$

Cum nunc ſit

$$\frac{v}{t}=\frac{1}{-p\,dr-r\,dp}\ \text{et}\ \frac{u}{t}=\frac{1}{r\,dq-q\,dr},$$

erit noſter numerator

ds

$$ds\left(\frac{p}{p\,dr - r\,dp} + \frac{q}{r\,dq - q\,dr}\right)\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)$$
$$= \frac{r\,ds\,(p\,dq - q\,dp)}{(p\,dr - r\,dp)\,(r\,dq - q\,dr)}\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2);$$

denominator vero, ob

$$\frac{u}{w} = \frac{q\,dp - p\,dq}{r\,dq - q\,dr} \text{ et } \frac{v}{w} = \frac{q\,dp - p\,dq}{p\,dr - r\,dp},$$

induet hanc formam:

$$(q\,dp - p\,dq)\left(\frac{dp}{r\,dq - q\,dr} - \frac{dq}{p\,dr - r\,dp}\right) =$$
$$(q\,dp - p\,dq)\,((p\,dp + q\,dq)\,dr - (dp^2 + dq^2)\,r).$$

Cum autem ſit

$$p\,dp + q\,dq = -r\,dr,$$

erit iſte denominator:

$$-\frac{r\,(q\,dp - p\,dq)\,(dp^2 + dq^2 + dr^2)}{(r\,dq - q\,dr)\,(p\,dr - r\,dp)}.$$

§. 14. Cum igitur euoluerimus tam numeratorem quam denominatorem, inde colligetur radius oſculi

$$z\,\Omega = \frac{ds}{\surd(dp^2 + dq^2 + dr^2)},$$

qui valor perfecte congruit cum eo qui ſuperiore methodo erat inuentus. Supereſt igitur vt eius quoque poſitionem reſpectu ternorum axium principalium definiamus. Hic autem vidimus eum cadere in normalem $z\,N$ productam, ſiquidem eius expreſſio fuerit poſitiua. Eſt vero ſubnorlis $q\,N = \frac{Y\,dY}{dX} = P\,Y$, atque ſi inſuper ducamus tangentem $z\,T$, erit ſubtangens $q\,T = \frac{Y\,dX}{dY} = \frac{Y}{P}$. At vero poſitionem huius tangentis $z\,T$ in praecedente diſſertatione tam ſimpliciter determinauimus, vt angulorum, ſub quibus ea ad axes principales O A, O B et O C inclinatur, coſinus ſint p, q et r.

§. 15.

§. 15. Conſideremus primo tangentem zT, pro cuius poſitione reſpectu rectae uv habemus tangentem anguli $qTz = \frac{qz}{qT} = P = \frac{dY}{dX}$; tum vero quia elementum curuae eſt ds, ſi ponamus breuitatis ergo angulum $qTz = \pi$, erit

$$\text{ſin. } \tau = \frac{dY}{ds} = -\frac{(pv + qu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv\sqrt{(uu + vv)}} \text{ et}$$

$$\text{coſ. } \tau = \frac{dX}{ds} = \frac{qv - pu}{\sqrt{(uu + vv)}},$$

vnde fit

$$\text{tang. } \tau = -\frac{(pv + qu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv(qv - pu)}.$$

Porro vero erit ſubtangens $qT = \frac{Y}{\text{tang. } \tau}$, eſt vero

$$Y = \frac{(v(u - x) - yu)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv\sqrt{(uu + vv)}},$$

vnde fit ſubtangens

$$qT = \frac{(v(u - x) - uy)(pu - qv)}{(pv + qu)\sqrt{(uu + vv)}},$$

quae ſubtracta ab aſciſſa X relinquet ſpatium

$$uT = \frac{py + q(u - x)\sqrt{(uu + vv)}}{pv + qu}.$$

Denique fiat $dX : ds = qT$ ad zT,

hincque prodibit ipſa

$$\text{tang. } zT = -\frac{(v(u - x) - uy)}{pv + qu} = \frac{uy - v(u - x)}{pv + qu}.$$

§. 16. Eodem modo definiamus poſitionem normalis zN, ac primo quidem erit angulus $qNz = 90° - \tau$; tum vero ſubnormalis

$$qN = YP = Y \text{tang. } \tau = \frac{(v(u - x) - uy)(pv + qu)(uuvv + uuww + vvww)}{uuvv(pu - qv)\sqrt{(uu + vv)}},$$

ipſa autem normalis erit

zN

$$z\,N = \frac{Y}{\text{coſ.}\,\tau} = \frac{(v(u-x) - uy)\sqrt{(uuvv + uuww + vvww)}}{uv(qv - pu)}.$$

Tandem ſi ſubnormalem abſciſſae X addamus, prodibit interuallum

$$U\,N = \frac{(u-x)(pvv(uu + ww) + quvww)\sqrt{(uu + vv)}}{uuvv(pu - qv)}$$
$$- \frac{y(quu(vv + ww) + puvww)\sqrt{(uu + vv)}}{uuvv(pu - qv)}.$$

§. 17. Transferamus nunc iterum hanc figuram in planum inclinatum $u\,v\,w$, et cum ſit recta $z\,y$ ad planum A O B perpendicularis, ducta recta $y\,T$ erit triangulum $z\,y\,T$ ad y rectangulum, vnde anguli $y\,z\,T$ coſinus erit $\frac{z\,y}{z\,T}$. Hic autem angulus aequalis eſt illi, ſub quo tang. $z\,T$ ad axem O C inclinatur, quia $z\,y$ ipſi O C eſt parallela. Cum igitur ſit $z\,y = z$ et $z\,T = \frac{uy - v(u-x)}{pv + qu}$, at vero ex prima aequatione: Tab. II. Fig. 7.

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = ,\ \text{fiat}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{u-x}{u} - \frac{y}{v} = \frac{v(u-x) - uy}{uv},\ \text{erit}$$
$$z\,T = \frac{uvz}{w(pv + qu)};$$

tum vero ex ſecunda aequatione:

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0,\ \text{erit}$$
$$\frac{r}{w} = -\frac{(pv + qu)}{uv},$$

quo valore ſubſtituto fit $z\,T = -\frac{z}{r}$, quocirca habebimus coſ. $y\,z\,T = -r$. Supra autem vidimus coſinum anguli, quo tangens curuae ad axem O C inclinatur, eſſe $= + r$; verum notandum eſt ibi tangentem ſurſum fuiſſe productam, cum hic deorſum dirigatur, vnde ſignum coſinus mutatur.

§. 18 Quoniam autem hic tantum de inclinatione agitur, quam tangens curuae tenet reſpectu trium axium, loco ipſius tangentis zT aliam quamcunque ipſi parallelam ſubſtituere licebit, quippe quae ad axes noſtros pariter erit inclinata. Hanc ob rem in plano inclinato
Tab. II. Fig. 8. uvw ex u ducatur recta ut, tangenti curuae parallela, ita vt ſit angulus $vut = \tau$. Capiatur autem haec recta ut, calculi gratia, $= 1$, ita vt, ſi ex t in uv demittatur perpendiculum td, ſit $ud = \text{coſ.}\, \tau$ et $td = \text{ſin.}\, \tau$. Tum vero in ipſo plano A O B ex d ad rectam uv ducatur normalis de, in eamque ex t demittatur perpendiculum te, et quia angulus tde eſt inclinatio plani uvw ad planum A O B, erit iſte angulus $tde = \theta$, vnde fit interuallum $de = td \,\text{coſ.}\, \theta = \text{ſin.}\, \tau \,\text{coſ.}\, \theta$ et perpendiculum in normalem $te = \text{ſin.}\, \tau \,\text{ſin.}\, \theta$; vbi notetur rectam te axi O C eſſe parallelam. Hinc ſi ducatur recta ue triangulum teu ad e erit rectangulum, vnde anguli ute coſinus erit

$$\text{coſ.}\, ute = \frac{te}{ut} = \text{ſin.}\, \theta \,\text{ſin.}\, \tau.$$

Supra autem vidimus eſſe

$$\text{ſin.}\, \theta = \frac{w\sqrt{(uu+vv)}}{\sqrt{(uuvv+uuww+vvww)}};$$

tum vero erat

$$\text{ſin.}\, \tau = -\frac{(pv+qu)\sqrt{(uuvv+uuww+vvww)}}{uv\sqrt{(uu+vv)}},$$

quae expreſſio ob

$$pv+qu = -r.\frac{uv}{w},$$

transformatur in hanc:

$$\text{ſin.}\, \tau = \frac{r\sqrt{(uuvv+uuww+vvww)}}{w\sqrt{(uu+vv)}},$$

vnde fit

ſin.

$$\text{ſin.}\,\theta\ \text{ſin.}\,\tau = r = \text{coſ.}\ u\,t\,e,$$

hoc eſt coſinus anguli, ſub quo tangens ſurſum ducta ad axem O C inclinatur $= r$, (Cf. §. 19.); recta autem $u\,e$ ſinum eiusdem anguli exhibebit, ita vt ſit

$$u\,e = \sqrt{(1 - r\,r)} = \sqrt{(p\,p + q\,q)},$$

quae etiam definiri poteſt ex triangulo $e\,d\,u$, in quo eſt

$$u\,d = \text{coſ.}\,\tau \quad \text{et} \quad d\,e = \text{ſin.}\,\tau\ \text{coſ.}\,\theta,$$

vnde fit

$$u\,e = \sqrt{(1 - \text{ſin.}\,\theta^2\ \text{ſin.}\,\tau^2)}.$$

Hinc autem deducitur tangens anguli $d\,u\,e$, ſcil.

$$\text{tang.}\ d\,u\,e = \frac{d\,e}{u\,d} = \text{coſ.}\,\theta\ \text{tang.}\,\tau,$$

ad quam euoluendam ponamus breuitatis gratia:

$$\sqrt{(u\,u\,v\,v + u\,u\,w\,w + v\,v\,w\,w)} = \Theta, \text{ eritque}$$

$$\text{coſ.}\,\theta = \frac{u\,v}{\Theta} \quad \text{et} \quad \text{tang.}\,\tau = \frac{\Theta\,r}{w\,(q\,v - p\,u)},$$

vnde fit

$$\text{tang.}\ d\,u\,e = \frac{r\,.\,u\,v}{w\,(q\,v - p\,u)}.$$

Quare cum anguli O $u\,w$ tangens ſit $\frac{v}{u}$, hinc reperiemus tangentem anguli O $u\,e$, ſcil.

$$\text{tang. O}\,u\,e = \frac{v\,w\,(q\,v - p\,u) - r\,u\,u\,v}{u\,w\,(q\,v - p\,u) + r\,u\,v\,v},$$

cuius fractionis numerator ob $\frac{p}{u} + \frac{r}{w} = -\frac{q}{v}$, ſiue

$$u\,r + w\,p = -\frac{q\,.\,u\,w}{v},$$

reducitur ad hanc formam: $q\,w\,(u\,u + v\,v)$; denominator vero, ob

$$q\,w + r\,v = -\frac{v\,w\,p}{u},$$

reducitur ad: $-p\,w\,(u\,u + v\,v)$, ex quo colligitur

$$\text{tang. O}\,u\,e = -\frac{q}{p}.$$

§. 20. Iam ex e in Ou demittatur perpendiculum ef; et cum ſit $ue = \surd(pp + qq)$, tum vero

$$\text{ſin.}\, euf = \frac{-q}{\surd(pp+qq)} \text{ et coſ.}\, euf = \frac{p}{\surd(pp+qq)},$$

hinc erit

$$ef = -q \text{ et } uf = p.$$

Quod ſi nunc ducta concipiatur recta tf, ea erit ad Ou normalis, hinque triangulum tfu ad f rectangulum, ex quo obtinebitur coſinus anguli Out, ſub quo tangens tu ad axem OA inclinatur $= p$, prorſus vt ſupra. Eodem modo ſi ex w ducatur ug parallela et aequalis ipſi ef, erit quoque triangulum tug ad g rectangulum, vnde coſinus anguli tug, ſub quo noſtra tangens ad axem OB inclinatur $= -q$. Sicque has inclinationes, quae ſuperiore methodo ſponte ſe offerebant, hac methodo per plures ambages tandem ſunt erutae.

§. 21. His expeditis videamus etiam quomodo normalis ad curuam zN (fig. 6.) ad ternos axes inclinetur. Hunc in finem concipiatur quoque ex puncto u in plano uvw educta recta normali illi zN parallela, quae itidem vnitati aequalis ſtatuatur: neque vero opus erit peculiarem figuram conſtituere. Nam ſi nunc recta ut pro directione huius normalis accipiatur, omnia manere poſſunt vt ante, ſi modo angulus dut capiatur $= 90° + \tau$. Sicque in praecedentibus formulis tantum opus erit ſcribere coſ. τ loco ſin. τ et ſin. τ loco coſ. τ. Sicque erit

$$td = \text{coſ.}\, \tau \text{ et } ud = -\text{ſin.}\, \tau.$$

Hincque porro erit

$$de = \text{coſ.}\, \tau\, \text{coſ.}\, \theta \text{ et } te = \text{coſ.}\, \tau\, \text{ſin.}\, \theta.$$

At

At vero per reductiones ante adhibitas habebimus

$$\text{ſin.}\,\tau = \frac{\Theta r}{w\sqrt{(uu+vv)}} \text{ et } \text{coſ.}\,\tau = \frac{qv-pu}{\sqrt{(uu+vv)}},$$

porro

$$\text{ſin.}\,\theta = \frac{w\sqrt{(uu+vv)}}{\Theta} \text{ et } \text{coſ.}\,\theta = \frac{uv}{\Theta},$$

quorum valorum ope erit

$$ud = -\frac{\Theta r}{w\sqrt{(uu+vv)}},$$

$$dt = \frac{uv}{\Theta},$$

$$de = \frac{uv(qv-pu)}{\Theta\sqrt{(uu+vv)}} \text{ et}$$

$$te = \frac{w(qv-pu)}{\Theta},$$

hincque

$$\text{tang.}\, due = -\frac{uvw(qv-pu)}{\Theta\Theta r} = \frac{de}{ud} = -\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{tang.}\,\tau}.$$

§. 22. Nunc autem angulus ute exprimit inclinationem radii oſculi ad axem OC, cuius ergo coſinus erit $= \frac{w(qv-pu)}{\Theta}$; vbi cum ſit

$$\Theta = \sqrt{(uuvv+uuww+vvww)}, \text{ erit}$$

$$\Theta = uvw\sqrt{\left(\frac{1}{uu}+\frac{1}{vv}+\frac{1}{ww}\right)} = \frac{uvw}{t}\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)},$$

vnde ille coſinus erit

$$= t\frac{(qv-pu)}{uv\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)}}.$$

Diuidatur tam numerator quam denominator per uv, et haec expreſſio euadet

$$\text{coſ.}\, ute = \frac{\left(\frac{qt}{u}-\frac{pt}{v}\right)}{\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2)}}.$$

§. 23. Supra autem vidimus eſſe

$$\frac{t}{u} = rdq - qdr \text{ et } \frac{t}{v} = pdr - rdp,$$

quibus valoribus introductis numerator noſtrae formulae

 erit

erit $d r$, vnde manifeſto colligitur anguli ſub quo radius oſculi ad axem O C inclinatur coſinus

$$= \frac{-d r}{\sqrt{(d q^2 + d p^2 + d r^2)}},$$

vbi diſcrimen ſigni non eſt attendendum, propterea quod ſignum per ſe mutatur, ſiue radium oſculi ſurſum vel deorſum tendere accipiamus.

§. 24. Cum igitur ſit recta

$$t e = -\frac{d r}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}};$$

erit recta

$$u e = \frac{\sqrt{(d p^2 + d q^2)}}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}}.$$

at vero tang. $e u d = \frac{u v w (q v - p u)}{\Theta \Theta r}$. Ante autem erat

$$\Theta = \frac{u v w}{t} \sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)},$$

vnde iſta tangens euadet

$$\frac{-(q v - p u) t t}{u v w r (d p^2 + d q^2 + d r^2)} = \frac{-\left(\frac{q t}{u} - \frac{p t}{v}\right) t}{w r (d p^2 + d q^2 + d r^2)},$$

cuius fractionis numerator transformatur in $+ t d r$, vnde iſta tangens fiet

$$\text{tang. } d u e = \frac{d r (q d p - p d q)}{r (d p^2 + d q^2 + d r^2)}.$$

Hunc igitur angulum ſubtrahamus ab angulo O $u v$, cuius tangens eſt $\frac{v}{u} = \frac{r d q - q d r}{p d r - r d p}$, et factis omnibus reductionibus, quibus hactenus ſumus vſi, tandem elicitur

$$\text{tang. O } u e = -\frac{d q}{d p}, \text{ ergo}$$

$$\text{ſin.} = \text{O } u e \frac{-d q}{\sqrt{(d p^2 + d q^2)}} \text{ et coſ. O } u e \frac{d p}{\sqrt{(d p^2 + d q^2)}}.$$

Cum igitur ſit

$$u e = \frac{\sqrt{(d p^2 + d q^2)}}{\sqrt{(d p^2 + d q^2 + d r^2)}}, \text{ erit}$$

u

$$uf = ue \text{ coſ. } Oue = \frac{dp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}} \text{ et}$$
$$ef = \frac{-dq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

§. 25. Cum autem ſit $ut = 1$, recta uf exprimit coſinum anguli fut, quem radius oſculi cum axe O A conſtituit, recta vero $fe = ug$ exprimit coſinum anguli gut, quem radius oſculi facit cum axe O B, quocirca habebimus:

$$\text{coſ. incl. rad. oſc. ad axem OA} = \frac{dp}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$
$$\text{coſ. incl. rad. oſc. ad axem OB} = \frac{dq}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}},$$
$$\text{coſ. incl. rad. oſc. ad axem OC} = \frac{dr}{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}.$$

Ceterum iſta methodus ideo notatu maxime digna videtur, quod per reductiones hic expoſitas formulae maxime complexae ad ſimpliciſſimas, quaſi praeter omnem expectationem, reuocantur.

§. 26. Quo omnes iſtae reductiones facilius inſtitui queant, ſequentes proprietates probe notaſſe iuuabit. Cum enim ſit

$$\frac{t}{u} = r\,dq - q\,dr;$$
$$\frac{t}{v} = p\,dr - r\,dp;$$
$$\frac{t}{w} = q\,dp - p\,dq;$$

exiſtente vti aſſumſimus

$$t = x(r\,dq - q\,dr) + y(p\,dr - r\,dp) + z(q\,dp - p\,dq),$$

ita vt t denotet quantitatem differentialem, hinc erit

I. $\frac{pt}{v} - \frac{qt}{u} = p(p\,dr - r\,dp) - q(r\,dq - q\,dr) = dr;$

II.

$$\text{II. } \frac{qt}{w} - \frac{rt}{v} = q(qdp - pdq) - r(pdr - rdp) = dp;$$

$$\text{III. } \frac{rt}{u} - \frac{pt}{w} = r(rdq - qdr) - p(qdp - pdq) = dq.$$

Deinde vero ſequentes formulae etiam commodam reductionem patiuntur.

$$\text{I. } \frac{tdp}{v} - \frac{tdq}{u} = dp(pdr - rdp) - dq(rdq - qdr)$$
$$= -r(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

$$\text{II. } \frac{tdq}{w} - \frac{tdr}{v} = dq(qdp - pdq) - dr(pdr - rdp)$$
$$= -p(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

$$\text{III. } \frac{tdr}{u} - \frac{tdp}{w} = dr(rdq - qdr) - dp(qdp - pdq)$$
$$= -q(dp^2 + dq^2 + dr^2).$$

Praeterea vero hae reductiones notatu dignae ſunt:

$$\frac{tt}{uu} + \frac{tt}{vv} = dr^2 + rr(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$
$$\frac{tt}{vv} + \frac{tt}{ww} = dp^2 + pp(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$
$$\frac{tt}{ww} + \frac{tt}{uu} = dq^2 + qq(dp^2 + dq^2 + dr^2).$$

Tab. II. Fig. 9. §. 27. Denique quoniam omnes has determinationes perduximus ad parallelepipeda circa axes principales exſtructa, cuiusmodi in hac figura exhibetur, vbi, prouti ternis lateribus O P, O Q, O R certi valores tribuuntur, diagonales O Ω poſitionem rectarum notabilium ad curvam pertinentium repraeſentant: quae hactenus hic ſunt allata ſequentibus parallelepipedis complecti licet. I.) Si parallelepipedi latera ſtatuantur

$$OP = x;\ OQ = y;\ OR = z;$$

diago-

diagonalis, quae erit $\sqrt{(xx + yy + zz)}$, dat poſitionem rectae ex puncto O ad curuae punctum z ductae. II. Si parallelepipedi latera capiantur

$$OP = p;\ OQ = q;\ OR = r;$$

tum diagonalis $O\Omega$ dabit poſitionem tangentis curuae in puncto z, ſiue iſta tangens parallela erit diagonali $O\Omega$; ipſa autem haec diagonalis erit

$$\sqrt{(pp + qq + rr)} = 1.$$

III.) Si parallelepipedi latera ſtatuantur:

$$OP = \frac{dp}{ds},\ OQ = \frac{dq}{ds},\ OR = \frac{dr}{ds},$$

tum diagonalis parallelogrammi dabit directionem radii oſculi in puncto z, ſeu ipſi erit parallela: ipſa vero diagonalis erit $\frac{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{ds}$, ita vt ipſe radius oſculi ſit $\frac{1}{O\Omega}$. IV.) Si latera parallelepipedi ſtatuantur:

$$OP = \frac{rdq - qdr}{ds},\ OQ = \frac{pdr - rdp}{ds},\ OR = \frac{qdp - pdq}{ds};$$

tum diagonalis $O\Omega$ erit normalis in planum in quo bina elementa curuae proxima incuruantur: ipſa autem diagonalis iterum erit $\frac{\sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}}{ds}$. Poſtremum hoc theorema inde manifeſto ſequitur, quod normalis ad planum incuruationis perinde inclinatur ad ternos axes, atque ipſum planum inclinatur ad plana principalia oppoſita.

DE PROPRIETATIBVS CIRCVLORVM IN SVPERFICIE SPHAERICA DESCRIPTORVM.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Qui proprietates triangulorum Sphaericorum attente conſideraueri, facile inueniet inter iſtas analogium quandam intercedere cum affectionibus triangulorum in plano deſcriptorum. Hoc igitur argumento inductus, inquirere propoſui, anne circulis in ſuperficie Sphaerae deſcriptis proprietatas quaedam competerent, analogae illis quibus circuli in plano deſcripti gaudent? Iſtius autem disquiſitionis ſpecimen quoddam heic Geometris proponere non dubitaui, quod Problemata ad hoc genus pertinentia in ſcriptis Geometricis rarius occurrere ſoleant.

§. 2.

§. 2. Theorema I. *Si in ſemicirculo* A B D, *polo* C *et intervallo arcu circuli maximi* A C *deſcripto, ex puncto eius quocunque* B *ducatur arcus circuli maximi ad* A D *normalis* B E, *erit* Tab. III Fig. 1.

$$\text{tang. } BE^2 : 1 = \text{ſin. } AC^2 - \text{ſin. } EC^2 : \text{coſ. } AC^2.$$

Demonſtr. Iungatur B C arcu circuli maximi, et quum in triangulo B E C rectangulo ſit

$$\text{coſ. } BE = \frac{\text{coſ. } BC}{\text{coſ. } EC}; \text{ fiet}$$
$$\text{ſin. } BE^2 = \frac{\text{coſ. } EC^2 - \text{coſ. } BC^2}{\text{coſ. } EC^2},$$

hincque

$$\text{tang. } BE^2 : 1 = \text{coſ. } EC^2 - \text{coſ. } BC^2 : \text{coſ. } BC^2$$
$$= \text{ſin. } BC^2 - \text{ſin. } EC^2 : \text{coſ. } BC^2.$$

Si ponatur radius Sphaerae infinitus, quo caſu fiet $\text{coſ. } BC = 1$ $\text{tang. } BE = BE$; $\text{ſin. } BC = BC$; $\text{ſin. } EC = EC$; fiet $BE^2 = BC^2 - EC^2$, quae eſt proprietas palmaria circuli in plano deſcripti.

§. 3. Theorema II. *Iisdem poſitis ac in Theoremate praecedenti, ſi inſuper iungantur* A B, B D, *arcubus circulorum maximorum, erit*

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} AD^2 = \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB^2 + \text{ſin. } \tfrac{1}{2} BD^2.$$

Demonſtr. Ductis ex polo C ad arcus A B, B D, arcubus circulorum maximorum C G et C F normalibus, facile liquet eſſe

$$AG = \tfrac{1}{2} AB; \; FD = \tfrac{1}{2} BD \text{ et } AC = CD = \tfrac{1}{2} AD.$$

Atqui in triangulis rectangulis A G C, C F D eſt

 ſin.

$$\text{ſin. } A\,G = \text{ſin. } A\,C \,.\, \text{ſin. } A\,C\,G;$$
$$\text{ſin. } D\,F = \text{ſin. } A\,C \text{ ſin. } D\,C\,F,$$

proinde

$$\text{ſin. } A\,G^2 + \text{ſin. } D\,F^2 = \text{ſin. } A\,C^2, \text{ ob}$$
$$\text{ſin. } A\,C\,G^2 = \text{coſ. } D\,C\,F^2.$$

§. 4. Theorema III. *Eadem adhibita conſtructione eſt*

$$2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} A\,B \,.\, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} B\,D = \text{ſin. } B\,E \,.\, \text{ſin. } A\,C.$$

Demonſtr. Nam ob

$$\text{ſin. } A\,G = \text{ſin. } A\,C \,.\, \text{ſin. } A\,C\,G \text{ et}$$
$$\text{ſin. } D\,F = \text{ſin. } A\,C \,.\, \text{ſin. } D\,C\,F, \text{ fit}$$
$$\text{ſin. } A\,G \,.\, \text{ſin. } A\,C = \text{ſin. } A\,C^2 \,.\, \text{ſin. } A\,C\,G \,.\, \text{coſ. } A\,C\,G;$$

et quum ſit

$$2 \text{ ſin. } A\,C\,G \,.\, \text{coſ. } A\,C\,G = \text{ſin. } A\,C\,B, \text{ ob}$$
$$A\,C\,B = 2\,A\,C\,G, \text{ erit}$$
$$2 \text{ ſin. } AG \,.\, \text{ſin. } AC = \text{ſin. } AC^2 \,.\, \text{ſin. } A\,C\,B = \text{ſin. } AC \,.\, \text{ſin. } BE,$$

ex quo liquet propoſitum.

§. 5. Theorema IV. *Iisdem poſitis erit*

$$\text{tang. } A\,E \,.\, \text{tang. } A\,C = \text{tang. } A\,B \text{ tang. } \tfrac{1}{2} A\,B$$

Demonſtr. $\frac{\text{tang. } A\,G}{\text{tang. } A\,C} = \text{coſ. } G\,A\,C$; ſimilique ratione

$$\frac{\text{tang. } A\,C}{\text{tang. } A\,B} = \text{coſ. } G\,A\,C, \text{ erit ergo}$$
$$\text{tang. } A\,E \,.\, \text{tang. } A\,C = \text{tang. } A\,B \,.\, \text{tang. } A\,G$$
$$= \text{tang. } A\,B \,.\, \text{tang. } \tfrac{1}{2} A\,B.$$

§. 6.

§. 6. Theorema V. *Eadem in vſum vocata conſtructione eſt*

$$\text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\ AD = \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\ (AB + BD)\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\ (BD - AB).$$

Demonſtr. Per proprietates triangulorum Sphaericorum habetur:

$$\text{coſ.}\ AB = \text{coſ.}\ AC^2 + \text{ſin.}\ AC^2\ \text{coſ.}\ ACB;$$
$$\text{coſ.}\ BD = \text{coſ.}\ AC^2 - \text{ſin.}\ AC^2\ \text{coſ.}\ ACB;$$

ideoque

$$\text{coſ.}\ AB + \text{coſ.}\ BD = 2\ \text{coſ.}\ AC^2;$$

vnde colligitur

$$\text{coſ.}\ AC^2 = \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\ (BD + AB)\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\ (BD - AB).$$

§. 7. Theorema. VI. *In eadem conſtructione eſt*

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ BE^2 = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ AE\ .\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ ED.$$

Demonſtr. Nam ob $\text{coſ.}\ BE = \frac{\text{coſ.}\ BC}{\text{coſ.}\ EC}$, fiet

$$\frac{1 - \text{coſ.}\ BE}{1 + \text{coſ.}\ BE} = \frac{\text{coſ.}\ EC - \text{coſ.}\ BC}{\text{coſ.}\ EC + \text{coſ.}\ BC},$$

id eſt ob

$$1 - \text{coſ.}\ BE = 2\ \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ BE^2;$$
$$1 + \text{coſ.}\ BE = 2\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\ BE^2;$$
$$\text{coſ.}EC - \text{coſ.}BC = 2\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(EC + BC)\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(BC - EC);$$
$$\text{coſ.}EC + \text{coſ.}BC = 2\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(BC + EC)\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(BC - EC);$$

atque

$$BC + EC = ED;\ BC - EC = AE;$$
$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ BE^2 = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ AE\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ DE.$$

§. 8. Theorema. VII. *Eadem facta conſtructione eſt* $\text{cot.}BAC\ \text{cot.}BDC = \text{coſ.}BC^2$.

Demonſtr. In triangulo rectangulo G C A eſt

$$\cot. BAC . \cot. GCA = \text{coſ}. BC$$

et in triangulo C E D,

$$\cot. BDC . \cot. FCD = \text{coſ}. BC,$$

ideoque ob

$$\text{tang}. GCA = \cot. FCD \text{ fiet}$$

$$\cot. BAC . \cot. BDC = \text{coſ}. BC^2.$$

Hinc per modum Corollarii fluit, ſi ducatur arcus circuli maximi L D, circulum minorem in D tangens, atque ex iſto puncto D bini arcus circulorum maximorum D B, D A, quorum hic per ipſum Polum C tranſit, tum ſi iungatur A B arcu circuli maximi, fore

$$\text{tang}. BDL . \cot. BAD = \text{coſ}\, BC^2.$$

Tum vero quoque inſignis proprietas angulorum in triangulo A B D hinc deducitur, fiet ſcilicet

$$\text{coſ}. BAC \,\text{coſ}. BDC - \text{ſin}. BAC \,\text{ſin}. BDC : \text{ſin}. BAC \,\text{ſin}. BDC$$
$$= \text{coſ}. BC^2 - 1 : 1 = - \text{ſin}. BC^2 : 1,$$

atqui eſt

$$\text{coſ}. ABD = \text{coſ}. BAC \,\text{coſ}. BDC - \text{ſin}. BAC . \text{ſin}. BDC,$$

vnde colligitur

$$\text{coſ}. ABD = - \text{ſin}. BC^2 . \text{ſin}. BAC . \text{ſin}. BDC.$$

Tab. III. Fig. 5. §. 9. Theorema. VIII. *Si circulo minori in ſuperficie Sphaerica deſcripto, inſcriptum fuerit triangulum ex arcubus circulorum maximorum* A B, B D, A D *compoſitum, atque angulus* A C D *ad polum* C *inſiſtat eidem arcui circuli minoris* A D *cui ad peripheriam inſiſtit angulus* A B D, *erit*

erit,

$$\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}ACD\,\text{coſ}\,BC = \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}AB\,\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}BD\,\text{ſin}\,ABD.$$

Demonſtr. Ex polo C ducantur ad A B, B D, arcus circulorum maximorum normales C E, C F, eritque in triangulis rectangulis B C E, B C F, $\text{ſin}\,BCE = \frac{\text{ſin}\,BE}{\text{ſin}\,BC}$,

$$\text{ſin}\,BCF = \frac{\text{ſin}\,BF}{\text{ſin}\,BC} \text{ et } \text{coſ}\,BCE = \text{coſ}\,BE\,.\,\text{ſin}\,EBC;$$

$$\text{coſ}\,BCF = \text{coſ}\,BF\,.\,\text{ſin}\,CBF,$$

inde colligitur

$$\text{ſin}\,ECF = \text{ſin}\,BCE\,.\,\text{coſ}\,BCF + \text{coſ}\,BCE\,\text{ſin}\,BCF$$

$$= \frac{\text{ſin}\,BE\,.\,\text{coſ}\,BF\,\text{ſin}\,CBF}{\text{ſin}\,BC} + \frac{\text{ſin}\,BF\,.\,\text{coſ}\,BE\,\text{ſin}\,CBE}{\text{ſin}\,BC}.$$

At quum ſit

$$\text{tang}\,EB = \text{tang}\,BC\,\text{coſ}\,EBC;$$

$$\text{tang}\,BF = \text{tang}\,BC\,\text{coſ}\,CBF,$$

vnde quoque habetur

$$\frac{\text{ſin}\,BE}{\text{ſin}\,BC} = \frac{\text{coſ}\,EB\,\text{coſ}\,EBC}{\text{coſ}\,BC},$$

$$\frac{\text{ſin}\,BF}{\text{ſin}\,BC} = \frac{\text{coſ}\,BF}{\text{coſ}\,BC}\,.\,\text{coſ}\,CBF,$$

his valoribus ſuffectis conſequimur

$$\text{ſin}\,ECF = \frac{\text{coſ}\,BE\,\text{coſ}\,BF}{\text{coſ}\,BC}(\text{ſin}\,EBC\,\text{coſ}\,FBC + \text{ſin}\,FBC\,\text{coſ}\,EBC)$$

$$= \frac{\text{coſ}\,BE\,.\,\text{coſ}\,BF}{\text{coſ}\,BC}\,.\,\text{ſin}\,EBF,$$

et quum ſit

$$ECF = \tfrac{1}{2}ACB + \tfrac{1}{2}BCD$$

ob angulos A C B, B C D biſectos per arcus E C, F C, fiet quoque ob

$$\tfrac{1}{2}ACD = 180 - \tfrac{1}{2}ACB - \tfrac{1}{2}BCD;$$

$$\text{ſin}\,ECF = \text{ſin}\,\tfrac{1}{2}ACD,$$

vnde

vnde liquet propoſitum. Si igitur arcus A D tranſeat per ipſum Polum, quo caſu $\frac{1}{2}$ A C D = 90°, erit tum

$$\text{coſ. } BC = \text{coſ. } \tfrac{1}{2} AB \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} BD \text{ ſin. } ABD.$$

§. 10. Theorema. IX. *Iisdem poſitis ac in Theoremate praecedenti erit*

$$\text{coſ. } \tfrac{1}{2} ACD = \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} BD$$
$$+ \text{coſ. } \tfrac{1}{2} AB \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} BD \text{ coſ. } ABD.$$

Demonſtr. Ex proprietatibus triangulorum Sphaericorum B C E, B C F habemus

$$\text{ſin. } BE = \text{ſin. } BC \text{ ſin. } BCE;$$
$$\text{ſin. } BF = \text{ſin. } BC \text{ ſin. } CBF;$$

hincque

$$\text{ſin. } BE \,.\, \text{ſin. } BF = \text{ſin. } BC^2 \text{ ſin. } BCE \,.\, \text{ſin. } CBF$$
$$= \text{ſin. } BCE \,.\, \text{ſin. } CBF - \text{coſ. } BC^2 \,.\, \text{ſin. } BCE \,.\, \text{ſin. } CBF.$$

Et quum ſit

$$\text{coſ } EBC = \text{coſ. } EC \text{ ſin. } BCE = \frac{\text{coſ. } BC}{\text{coſ. } BE} \text{ ſin. } BCE,$$

tumque

$$\text{coſ. } FBC = \frac{\text{coſ. } BC}{\text{coſ. } BF} \,.\, \text{ſin. } BCF,$$

prodit

$$\text{coſ. } BC \text{ ſin. } BCE = \text{coſ. } BE \text{ coſ. } EBC \text{ et}$$
$$\text{coſ. } BC \text{ ſin. } BCF = \text{coſ. } BF \text{ coſ. } FBC,$$

ideoque

$$\text{coſ. } BC^2 \,.\, \text{ſin. } BCE \,.\, \text{ſin. } BCF$$
$$= \text{coſ. } BE \text{ coſ } BF \text{ coſ. } FBC \text{ coſ. } EBC,$$

vnde colligitur:

$$\text{ſin. } BCE \,.\, \text{ſin. } CBF = \text{ſin. } BE \text{ ſin. } BF$$
$$+ \text{coſ. } BE \text{ coſ. } BF \text{ coſ. } FBC \text{ coſ. } EBC.$$

Tum

Tum vero eſt

$$\text{coſ. } BCE = \text{coſ. } BE \text{ ſin. } EBC;$$
$$\text{coſ. } BCF = \text{coſ. } BF \text{ ſin. } CBF,$$

ergo

$$\text{coſ. } ECF = \text{coſ. } BCE \text{ coſ. } BCF - \text{ſin. } BCE \,.\, \text{ſin. } BCF$$
$$= \text{coſ.} BE \text{coſ.} BF (\text{ſin.} EBC \text{ſin.} FBC - \text{coſ.} EBC \text{coſ.} FBC)$$
$$- \text{ſin. } BE \,.\, \text{ſin. } BF,$$

ſiue

$$- \text{coſ. } ECF = \text{ſin. } BE \text{ ſin. } BF + \text{coſ.} BE \text{ coſ. } BF \text{ coſ. } ABD;$$

et quum ſit

$$ECF = 180 - \tfrac{1}{2} ACD,$$

fiet omnino

$$\text{coſ.} \tfrac{1}{2} ACD = \text{coſ. } BE \,.\, \text{coſ. } BF + \text{ſin.} BE \text{ ſin.} BF \text{ coſ. } ABD.$$

§. 11. Theorema X. *Si bini arcus circulorum maximorum* A B, D E, *ſe interſecent in* F, *circulo vero cuidam minori occurrant in* A, B, D, E, *erit*

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} AF \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} BF = \text{tang.} \tfrac{1}{2} DF \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} EF.$$

Demonſtr. Iungatur polus circuli minoris C cum puncto interſectionis F, arcu circuli maximi C F, et ducantur arcus circulorum maximorum C B, C D, eritque in triangulis C G F, C H F rectangulis Tab. III. Fig. 3. N. 1 & 2.

$$\text{coſ. } FG = \frac{\text{coſ. } FC}{\text{coſ. } GC}, \quad \text{coſ. } FH = \frac{\text{coſ. } FC}{\text{coſ. } CH}.$$

Simili modo in triangulis C D H, C B G rectangulis eſt

$$\text{coſ. } BG = \frac{\text{coſ. } BC}{\text{coſ.} GC},$$
$$\text{coſ. } DH = \frac{\text{coſ.} BC}{\text{coſ. } CH},$$

proinde

$$\frac{\text{coſ. } F G}{\text{coſ. } B G} = \frac{\text{coſ. } F C}{\text{coſ. } B C},$$

$$\frac{\text{coſ. } F H}{\text{coſ. } D H} = \frac{\text{coſ. } F C}{\text{coſ. } B C};$$

tumque

$$\frac{\text{coſ. } F G - \text{coſ. } B G}{\text{coſ. } F G + \text{coſ. } B G} = \frac{\text{coſ. } F H - \text{coſ. } D H}{\text{coſ. } F H + \text{coſ. } D H},$$

id eſt

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} (F G + B G) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (B G - F G) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} (D H + F H) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (D H - F H);$$

ſeu ob

$$\tfrac{1}{2} (F G + B G) = \tfrac{1}{2} A F; \; \tfrac{1}{2} (B G - F G) = \tfrac{1}{2} B F;$$

$$\tfrac{1}{2} (D H + F H) = \tfrac{1}{2} F E; \; \tfrac{1}{2} (D H - F H) = \tfrac{1}{2} D F,$$

fiet

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A F \,.\, \text{tang. } \tfrac{1}{2} B F = \text{tang. } \tfrac{1}{2} D F \,.\, \text{tang. } \tfrac{1}{2} E F.$$

§. 12. Antequam vlterius procedamus, nonnulla de determinatione angulorum in triangulo Sphaerico ex datis lateribus, vel laterum ex datis angulis, adferre placet, quippe quorum vſum in ſequentibus adhibere neceſſe erit. Si igitur in triangulo Sphaerico A B C ſingula latera, A B, A C, A C per litteras minores c, b, a exprimantur; anguli vero per litteras maiores A, B, C indigitentur, pro determinatione angulorum ex datis lateribus haec habebitur aequatio:

$$\text{coſ. } a = \text{coſ. } b \text{ coſ. } c + \text{ſin. } b \text{ ſin. } c \text{ coſ. } A$$

et pro determinatione laterum ex datis angulis iſthaec:

$$\text{coſ. } A = \text{ſin. } B \text{ ſin. } C \text{ coſ. } a - \text{coſ. } B \text{ coſ. } C.$$

Ex priori, ſi ſimul addatur et ſubtrahatur ſin. b ſin. c, colligitur

coſ.

$$\text{coſ.}\, a = \text{coſ.}\,(b-c) - \text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c\,(1-\text{coſ.}\,A)$$
$$= \text{coſ.}\,(b-c) - 2\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}A^2\ \text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c;$$

vel

$$\text{coſ.}\, a = \text{coſ.}\,(b+c) + \text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c\,(1+\text{coſ.}\,A)$$
$$= \text{coſ.}\,(b+c) + 2\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2\ \text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c;$$

Hincque deducitur:

$$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}A^2\ \text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c = \text{coſ.}\,(b-c) - \text{coſ.}\, a$$
$$= 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(a-b+c) \text{ et}$$
$$2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2\ \text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c = \text{coſ.}\, a - \text{coſ.}\,(b+c)$$
$$= 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a).$$

Nunc ſi breuitatis gratia ponamus $\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$, hae formulae ita concinnius exprimentur:

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\text{ſin.}\,(s-c)\ \text{ſin.}\,(s-b)}{\text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c};$$
$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\text{ſin.}\, s\ \text{ſin.}\,(s-a)}{\text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c},$$

nec non

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\text{ſin.}\,(s-c)\ \text{ſin.}\,(s-b)}{\text{ſin.}\, s\ \text{ſin.}\,(s-a)} \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,A^2 = \frac{4\,\text{ſin.}\, s\ \text{ſin.}\,(s-a)\ \text{ſin.}\,(s-c)\ \text{ſin.}\,(s-b)}{\text{ſin.}\, b^2\ \text{ſin.}\, c^2}, \text{ ſiue}$$
$$\text{ſin.}\,A = \frac{2\sqrt{(\text{ſin.}\, s\ \text{ſin.}\,(s-a)\ \text{ſin.}\,(s-c)\ \text{ſin.}\,(s-b)}}{\text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c}.$$

§. 13. Quia nunc ſimili quoque modo habetur:

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\,(s-a)\ \text{ſin.}\,(s-c)}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, c}};\quad \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\, s\ \text{ſin.}\,(s-b)}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, c}};$$
$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\,(s-a)\ \text{ſin.}\,(s-b)}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, b}};\quad \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\, s\ \text{ſin.}\,(s-c)}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, b}};$$

inde colligitur:

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}B$$
$$= \frac{(\text{ſin.}\, s - \text{ſin.}\,(s-c))}{\text{ſin.}\, c}\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,(s-b)\ \text{ſin.}\,(s-a)}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, b}} \text{ et}$$

 ſin.

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}B$$
$$= \frac{(\text{ſin.}\,(s-b) + \text{ſin.}\,(s-a))}{\text{ſin.}\,c}\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,s\,.\,\text{ſin.}\,(s-c)}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b}},$$

vnde denuo concluditur

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}C$$
$$= \frac{(\text{ſin.}\,s - \text{ſin.}\,(s-c))}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,c}\sqrt{(\text{ſin.}\,s\,.\,\text{ſin.}\,(s-a)\,\text{ſin.}\,(s-b)\,\text{ſin.}\,(s-c))}$$
$$- \frac{(\text{ſin.}\,(s-b) + \text{ſin.}\,(s-a))}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b\,\text{ſin.}\,c}\sqrt{(\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}\,(s-a)\,\text{ſin.}\,(s-b)\,\text{ſin.}\,(s-c))}.$$

Atqui

$$\text{ſin}\,s - \text{ſin.}\,(s-c) = 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(a+b) \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,(s-b) + \text{ſin.}\,(s-a) = 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(a-b),$$

quorum differentia erit

$$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(a+b) - \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(a-b))$$
$$= -4\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}b).$$

Hoc igitur valore ſubſtituto erit:

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{\sqrt{(\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}\,(s-a)\,\text{ſin.}\,(s-b)\,\text{ſin.}\,(s-c))}}{2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}c}.$$

§. 14. Ex aequatione

$$\text{coſ.}\,A = \text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,C\,\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,B\,\text{coſ.}\,C,$$

ſi ſimul addatur et ſubtrahatur ſin. B ſin. C, colligimus

$$\text{coſ.}\,A = \text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,C\,(1 + \text{coſ.}\,a) - \text{coſ.}\,(B-C)$$
$$= 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{ſin}\,B\,\text{ſin.}\,C - \text{coſ.}\,(A-C);$$
$$\text{coſ.}\,A = -\,\text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,C\,(1 - \text{coſ.}\,a) - \text{coſ.}\,(B+C)$$
$$= -\,2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,C - \text{coſ.}\,(B+C);$$

vnde deducimus:

— ſin.

$$2 \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C = \operatorname{coſ.} A + \operatorname{coſ.} (B - C)$$
$$= 2 \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} (A + B - C) \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} (A - B + C);$$
$$- \operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C = \operatorname{coſ.} A + \operatorname{coſ.} (B + C)$$
$$= 2 \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} (A + B + C) \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} (B + C - A);$$

vbi ſi breuitatis gratia ſtatuatur $\tfrac{1}{2}(A + B + C) = S$, erit

$$\operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C = \operatorname{coſ.} (S - C) \operatorname{coſ.} (S - B); \text{ et}$$
$$\operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C = - \operatorname{coſ.} S \,.\, \operatorname{coſ.} (S - A),$$

hincque colligitur

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} a^2 = - \frac{\operatorname{coſ.} S \operatorname{coſ.} (S - A)}{\operatorname{coſ.} (S - C) \operatorname{coſ.} (S - B)} \text{ et}$$
$$\operatorname{ſin} a = \frac{\sqrt{- \operatorname{coſ.} S \operatorname{coſ.} (S - A) \operatorname{coſ.} (S - C) \operatorname{coſ.} (S - B)}}{2 \operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C}.$$

Tum vero quum ſimili ratione ſit:

$$\operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\operatorname{coſ.}(S - A) \operatorname{coſ.} (S - C)}{\operatorname{ſin.} A \operatorname{ſin.} C}}; \quad \operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{- \frac{\operatorname{coſ.} S. \operatorname{coſ.} (S - B)}{\operatorname{ſin.} A \operatorname{ſin.} C}};$$
$$\operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\operatorname{coſ.} (S - A) \operatorname{coſ.}(S - B)}{\operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} A}}; \quad \operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{- \frac{\operatorname{coſ.} S \operatorname{coſ.}(S - C)}{\operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} A}},$$

fiet

$$\operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2} (a + b) = \frac{\operatorname{coſ.} (S - A) + \operatorname{coſ.} (S - B)}{\operatorname{ſin.} C} \sqrt{- \frac{\operatorname{coſ.} S \operatorname{coſ.} (S - C)}{\operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} A}};$$
$$\operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} (a + b) = \frac{(\operatorname{coſ.} (S - C) + \operatorname{coſ.} S)}{\operatorname{ſin.} C} \sqrt{+ \frac{\operatorname{coſ.} (S - B) \operatorname{coſ.} (S - A)}{\operatorname{ſin.} A \operatorname{ſin.} B}};$$

et denique

$$\operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2}(a+b+c) = (\operatorname{coſ.} S + \operatorname{coſ.}(S - C) + \operatorname{coſ.} (S - A) + \operatorname{coſ.} (S - B))Q,$$

exiſtente

$$Q = \frac{\sqrt{- \operatorname{coſ.} S \operatorname{coſ.} (S - A) \operatorname{coſ.} (S - B) \operatorname{coſ.} (S - C)}}{\operatorname{ſin.} A \operatorname{ſin.} B \operatorname{ſin.} C}.$$

Atqui eſt

$$\operatorname{coſ.} S + \operatorname{coſ.} (S - C) = 2 \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} C \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} (A + B) \text{ et}$$
$$\operatorname{coſ} (S - A) + \operatorname{coſ.} (S - B) = 2 \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} C \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} (A - B),$$

quorum ſumma erit

$$2\left(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,C\ \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}(A-B) + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\right)$$
$$= 4\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,C\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,B\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,A.$$

Hoc igitur valore ſubſtituto prodit

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sqrt{-\text{coſ.}S\ \text{coſ}\,(S-A)\ \text{coſ.}(S-B)\ \text{coſ.}(S-C)}}{2\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}B\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}C}.$$

§. 15. Porro heic quoque obſeruari meretur eſſe

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}C$$
$$= 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\left(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(a+b) + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\right)\frac{\sqrt{\text{ſin.}\,s\ \text{ſin.}(s-a)\ \text{ſin.}(s-b)\ \text{ſin.}(s-c)}}{\text{ſin.}\,a\ \text{ſin.}\,b\ \text{ſin.}\,c}$$
$$= \frac{4\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}b}{\text{ſin.}\,a\ \text{ſin.}\,b\ \text{ſin.}\,c}\sqrt{\text{ſin.}\,s\ \text{ſin.}(s-a)\ \text{ſin.}(s-b)\ \text{ſin.}(s-c)}$$
$$= \frac{\sqrt{\text{ſin.}\,s\ \text{ſin.}(s-a)\ \text{ſin}\,(s-b)\ \text{ſin.}\,(s-c)}}{2\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}b\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c}$$

Tum vero et patet quomodo mutatis mutandis

$$\text{coſ}\,\tfrac{1}{2}(A-B+C)\ \text{vel}\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

per latera trianguli exprimi queant. Deinde etiam notari conuenit eſſe

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c) = 2\,Q\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\left(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A-B) - \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\right)$$
$$= 4\,Q\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,C\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,A\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,B,$$

ideoque fiet

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{\sqrt{-\text{coſ.}S\ \text{coſ.}(S-A)\ \text{coſ.}(S-B)\ \text{coſ.}(S-C)}}{2\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B\ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}C};$$

at mutatis mutandis ſimiles formulae pro $\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(a-b+c)$ vel $\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)$ adferri poſſunt.

Tab. III. Fig. 2. §. 16. Theorema XI. *Si circulo minori A B D inſcriptum fuerit triangulum A B D ex arcubus circulorum maximo-*

ximorum compoſitum, et ex puncto B in baſin AD ducatur arcus circuli maximi normalis BL, erit

$$\text{ſin. } BL = \frac{2\,\text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \,.\, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} BD}{\text{tang. } BC \,.\, \text{coſ. } \tfrac{1}{2} AD}.$$

Demonſtr. In triangulo rectangulo BAL eſt

$$\text{ſin. } BL = \text{ſin. } AB \,.\, \text{ſin. } BAL,$$

atque per Theor. VIII. eſt

$$\text{ſin. } BAD = \frac{\text{ſin. } BCF \text{ coſ. } BC}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2} AB \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} AD},$$

hincque

$$\text{ſin. } BL = \frac{\text{ſin. } AB \text{ coſ. } BC \,.\, \text{ſin. } BCF}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2} AB \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} AD}$$

$$= \frac{2\,\text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \text{ coſ. } BC \text{ ſin. } BCF}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2} AD}.$$

Eſt vero in triangulo rectangulo BCF,

$$\text{ſin. } BCF = \frac{\text{ſin. } BF}{\text{ſin. } BC} = \frac{\text{ſin. } \tfrac{1}{2} BD}{\text{ſin. } BC},$$

vnde colligitur

$$\text{ſin. } BL = \frac{2\,\text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} BD}{\text{tang. } BC \,.\, \text{coſ. } \tfrac{1}{2} AD}.$$

§. 17. Theorema. XII. *Iisdem poſitis, ſi ſtatuatur* BD $= a$, AD $= b$, AB $= c$ et $\tfrac{1}{2}(a + b + c) = s$, *erit*

$$\text{ſin. } BL = \frac{2\sqrt{(\text{ſin. } s \text{ ſin. }(s-a) \text{ ſin. }(s-b) \text{ ſin. }(s-c))}}{\text{ſin. } b}.$$

Demonſtr. Per ea quae ſupra §. 12. demonſtravimus, con-

ſtat

conſtat eſſe

$$\text{ſin. } BAD = \frac{2\sqrt{\text{ſin. } s \text{ ſin. } (s-a) \text{ ſin. } (s-b) \text{ ſin. } (s-c)}}{\text{ſin. } b \text{ ſin. } c},$$

ideoque ob

$$\text{ſin. } BL = \text{ſin. } AB \text{ ſin. } BAD = \text{ſin. } A \text{ ſin. } C,$$

ſiet omnino

$$\text{ſin. } BL = \frac{2\sqrt{\text{ſin. } s \text{ ſin. } (s-a) \text{ ſin. } (s-b) \text{ ſin. } (s-c)}}{\text{ſin. } b}.$$

§. 18. Theorema II. *Si circulo minori fuerit inſcriptum triangulum A B D, erit pro diſtantia poli C a peripheria circuli iſtius minoris,*

$$\text{tang. } BC = \frac{2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} a \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} b \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} c}{\sqrt{\text{ſin. } s \text{ ſin. } (s-a) \text{ ſin. } (s-b) \text{ ſin. } (s-c)}}.$$

Demonſtr. Nam per Theor. XI. eſt

$$\text{tang. } BC = \frac{2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} AB \text{ . ſin. } \tfrac{1}{2} BD}{\text{ſin. } BL \text{ . coſ. } \tfrac{1}{2} BD},$$

ſuffecto igitur valore ipſius ſin. B L, ex Theor. XII. prodit omnino

$$\text{tang. } BC = \frac{2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} a \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} b \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} c}{\sqrt{\text{ſin. } s \text{ . ſin. } (s-a) \text{ ſin. } (s-b) \text{ ſin. } (s-c)}}.$$

§. 19. Theorema. XIV. *Si in triangulo A B D, anguli A, B, D reſpectiue exprimantur per litteras A, B, C, erit quoque*

$$\text{tang. } BC = -\frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2} a \text{ tang. } \tfrac{1}{2} b \text{ tang. } \tfrac{1}{2} c}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2} (A + B + C)}.$$

Demonſtr. Supra §. 13. demonſtrauimus eſſe

coſ.

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+A+C)=-\frac{\sqrt{\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}(s-a)\,\text{ſin.}(s-b)\,\text{ſin.}(s-c)}}{2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}c};$$

vnde fiet

$$\sqrt{\text{ſin.}\,s\ \text{ſin.}(s-a)\ \text{ſin.}\,(s-b)\ \text{ſin.}\,s-c)}$$
$$=-2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\,(A+B+C)\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}c,$$

quo valore ſuffecto in expreſſione pro tang. B C, Theoremate praecedente inuecta, habebimus:

$$\text{tang.}\,B\,C=-\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}a\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}b\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}c}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)}.$$

§. 20. Theorema. XV. *Iisdem poſitis ſi ſtatuatur* $\tfrac{1}{2}(A+B+C)=S$, *fiet*

$$\text{tang.}\,B\,C=\sqrt{\frac{-\text{coſ.}\,S}{\text{coſ.}\,(S-A)\ \text{coſ.}\,(S-B)\ \text{coſ.}\,(S-C)}}.$$

Demonſtr. Per ea quae §. 14. demonſtrauimus fit

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}a\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}b\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}c=\text{coſ.}\,S\sqrt{\frac{-\text{coſ.}\,S}{\text{coſ.}\,(S-A)\ \text{coſ.}\,(S-B)\ \text{coſ.}\,(S-C)}},$$

vnde liquet propoſitum. Caeterum idem quoque hunc in modum demonſtratur. In triangulo rectangulo C B F eſt

$$\text{tang.}\,B\,C=\frac{\text{tang.}\,B\,F}{\text{coſ.}\,C\,B\,F},$$

iam quum ſit

$$C\,B\,F=S-A\ \text{ et }\ B\,F=\tfrac{1}{2}a,\ \text{fiet}$$

$$\text{tang.}\,B\,C=\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}a}{\text{coſ.}\,(S-A)}=\sqrt{\frac{-\text{coſ.}\,S}{\text{coſ.}\,(S-A)\ \text{coſ.}\,(S-B)\ \text{coſ.}(S-C)}}\ \text{ob}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\text{coſ.}\,S\ \text{coſ.}\,(S-A)}{\text{coſ.}\,(S-B)\ \text{coſ.}\,(S-C)}}.$$

Tum vero quum ſit per §. 15.

$$\text{coſ.}(S-A)=\frac{\sqrt{\text{ſin.}\,s\ \text{ſin}\,(s-a)\ \text{ſin.}(s-b)\ \text{ſin.}(s-c)}}{2\ \text{ſin.}\,\frac{1}{2}b\ \text{ſin.}\,\frac{1}{2}c\ \text{ſin}\,\frac{1}{2}a},\ \text{fiet}$$

$$\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}a}{\text{coſ.}(S-A)}=\frac{2\ \text{ſin.}\,\frac{1}{2}a\ \text{ſin.}\,\frac{1}{2}b\ \text{ſin.}\,\frac{1}{2}c}{\sqrt{\text{ſin.}\,s\ \text{ſin.}(s-a)\ \text{ſin.}(s-b)\ \text{ſin}\,(s-c)}},$$

vnde veritas Theorematis XIII. nunc quoque alia ratione redditur manifeſta.

§. 21. Quia in triangulo B C F eſt

$$\text{coſ.}\,BCF=\text{ſin.}\,CBF\ \text{coſ.}\,BF,\ \text{fiet}$$

$$\text{coſ.}\,BCF=\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}BCD=\text{ſin.}(S-A)\ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a,$$

vbi quum

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{coſ.}(S-B)\ \text{coſ.}(S-C)}{\text{ſin.}\,B\ \text{ſin.}\,C}},\ \text{fiet}$$

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}BCD=\text{ſin.}(S-A)\sqrt{\frac{\text{coſ.}(S-B)\ \text{coſ.}(S-C)}{\text{ſin.}\,B\ \text{ſin.}\,C}}.$$

Tum vero quia $\text{tang.}\,CF=\text{tang.}\,CBF\,.\,\text{ſin.}\,BF$, fit

$$\text{tang.}\,CF=\text{tang.}\,(S-A)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a=\text{tang.}(S-A)\sqrt{-\frac{\text{coſ.}\,S\ \text{coſ.}(S-A)}{\text{ſin.}\,B\ \text{ſin.}\,C}}$$

$$=\text{ſin.}\,(S-A)\sqrt{\frac{-\text{coſ.}\,S}{\text{ſin.}\,B\ \text{ſin.}\,C\ \text{coſ.}\,(S-A)}}.$$

Quodſi autem formulae quaerantur pro C F vel angulo $\frac{1}{2}$ B C D, in quas ſolae expreſſiones ex lateribus conflatae ingrediuntur, iſtae non aeque euadent concinnae, quare illis recenſendis non immoror.

Tab. III. Fig. 5. §. 22. Theorema. XVI. *Si triangulo ABD, ex arcubus circulorum maximorum compoſito, inſcriptus fuerit circulus minor* E G F, *eius polo exiſtente in* C, *et qui tangit latera trianguli AB, BD, AD in* E, F, G, *erit poſitis vt ante, A B, B D, A D reſpectiue ipſis c, a, b aequalibus et* $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, *erit inquam*

ſin.

$$\text{tang. E C}^2 = \frac{\text{ſin.}(s-c)\,\text{ſin.}(s-b)\,\text{ſin.}(s-c)}{\text{ſin.}\,s}.$$

Demonſtr. Ductis arcubus circulorum maximorum A C, B C, D C liquet angulos B A D, A B D, B D A per hos arcus biſecari, vnde conſtat eſſe A E = A G; B E = B F; D G = D F, quamobrem patet eſſe

$$\text{A E} = \tfrac{1}{2}(\text{A B} + \text{B D} + \text{A D}) - \text{B D} = s - a;$$
$$\text{B E} = s - b;\ \text{D F} = s - c.$$

Iam in triangulo A E C rectangulo eſt $\text{tang. A C E} = \frac{\text{tang. A E}}{\text{ſin. E C}}$, et in triangulo B E C,

$$\text{tang. B C E} = \frac{\text{tang. B E}}{\text{ſin. E C}},\ \text{hinc}$$

$$\text{tang. A C B} = \frac{\text{tang. A C E} + \text{tang. B C E}}{1 - \text{tang. A C E tang. B C E}}$$
$$= \frac{\text{tang. A E} + \text{tang. B E}}{\text{ſin. E C}\left(1 - \frac{\text{tang. A E . tang. B E}}{\text{ſin. E C}^2}\right)}.$$

At quum ſit angulus

$$\text{A C B} = \text{B C F} + \text{A C G},$$

fiet omnino

$$\text{A C B} = 180° - \tfrac{1}{2}\text{F C G} = 180° - \text{F C D},$$

vnde

$$\text{tang. A C B} = -\ \text{tang. F C D} = -\frac{\text{tang. F D}}{\text{ſin. C E}},$$

erit ergo haec aequatio:

$$\frac{\text{tang. A E} + \text{tang. B E}}{\text{ſin. C E}\left(1 - \frac{\text{tang. A E tang. B E}}{\text{ſin. C E}^2}\right)} = -\frac{\text{tang. F D}}{\text{ſin. C E}},$$

ex qua colligitur

$$\text{tang. A E} + \text{tang. B E} + \text{tang. F D} = \frac{\text{tang. A E . tang. B E tang. F D}}{\text{ſin. C E}^2}\ \text{et}$$

$$\frac{\text{tang. A E} + \text{tang. B E} + \text{tang. F D}}{\text{tang. A E tang. B E tang. F D}} = \frac{+1}{\text{ſin. C E}^2},$$

hinc autem deducitur

$$\text{ſin. AE coſ. BE coſ. FD} + \text{ſin. BE coſ. AE coſ. FD}$$
$$+ \text{ſin. FD coſ. AE coſ. BE} - \text{ſin. AE ſin. BE ſin. FD}$$
$$= \text{cot. EC}^2 \text{ ſin. AE ſin. BE ſin. DF}, \text{ ſeu}$$

$$\text{tang. EC} = \frac{\text{ſin. AE . ſin. BE . ſin. DF}}{\text{ſin. (AE + BE + DF)}},$$

id eſt ſuffectis valoribus ſupra inuentis

$$\text{tang. EC} = \sqrt{\frac{\text{ſin.}(s-a)\text{ ſin.}(s-b)\text{ ſin.}(s-c)}{\text{ſin. } s}}.$$

Facilius autem idem hunc in modum demonſtratur:

$$\text{tang. EC} = \text{tang. EAC . ſin. AE} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} \text{ ſin.}(s-a),$$

eſt vero per §. 12.

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} \text{A} = \sqrt{\frac{\text{ſin.}(s-b)\text{ ſin.}(s-c)}{\text{ſin. } s \text{ ſin.}(s-a)}},$$

ex quo omnino colligitur

$$\text{tang. CE} = \sqrt{\frac{\text{ſin.}(s-a)\text{ ſin.}(s-b)\text{ ſin.}(s-c)}{\text{ſin. } s}}.$$

§. 23. Theorema XVII. *Iisdem poſitis eſt*

$$\text{tang. EC} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} \text{A tang.} \tfrac{1}{2} \text{B tang.} \tfrac{1}{2} \text{C ſin. } s.$$

Demonſtr. Quia vt ſupra demonſtrauimus eſt

$$\text{tang. EC} = \frac{\text{ſin. AE . ſin. BE . ſin. DF}}{\text{ſin. (AE + BE + DF)}},$$

tum vero ſit

$$\text{ſin. AE} = \frac{\text{tang. EC}}{\text{tang. EAD}};$$
$$\text{ſin. BE} = \frac{\text{tang. EC}}{\text{tang. EBD}};$$
$$\text{ſin. DF} = \frac{\text{tang. EC}}{\text{tang. CDF}}; \text{ fiet}$$

$$\text{tang.EC} = \text{tang.EAD.tang.EBD.tang.CDF.ſin.(AE+BE+DF)},$$

hoc eſt

$$\text{tang. EC} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} \text{A tang.} \tfrac{1}{2} \text{B tang.} \tfrac{1}{2} \text{C ſin. } s.$$

§. 24.

§. 24. Theorema XVIII. *Eadem facta conſtructione eſt*

$$\text{tang. E C} = \frac{\sqrt{-\text{coſ.S coſ}(S-A)\,\text{coſ.}(S-B)\,\text{coſ.}(S-C)}}{2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}C}.$$

Demonſtr. Quum ſit per §. 14

$$\text{ſin.}\ s = \frac{\sqrt{-\text{coſ.S coſ.}(S-A)\,\text{coſ.}(S-B)\,\text{coſ.}(S-C)}}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}B\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}C},$$

atque in Theoremate praecedente

$$\text{tang. E C} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}A\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}B\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}C\ \text{ſin.}\ s,$$

fiet omino

$$\text{tang. E C} = \frac{\sqrt{-\text{coſ.S coſ.}(S-A)\,\text{coſ.}(S-B)\,\text{coſ.}(S-C)}}{2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}C}.$$

Idem vero ſic quoque facilius demonſtratur:

$$\text{tang. EC} = \text{ſin. AE tang. EAC} = \text{ſin.}(s-a)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}A,$$

at per §. 13. eſt

$$\text{ſin}\ (s-a) = \frac{\sqrt{-\text{coſ. S coſ.}(S-A)\,\text{coſ.}(S-B)\,\text{coſ.}(S-C)}}{2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}A},$$

vnde liquet propoſitum.

§. 25. Hinc etiam formulae ſuppetunt pro arcubus A C, B C, D C et angulis A C E, B C E, D C F, ſcilicet in triangulo E A C eſt

$$\text{tang. A C} = \frac{\text{tang. A E}}{\text{coſ. EAC}} = \frac{\text{tang.}(s-a)}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A},$$

at per §. 12. eſt

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{ſin.}\,s\ \text{ſin.}(s-a)}{\text{ſin.}\,b\ \text{ſin.}\,c}};\ \text{hinc fit}$$

$$\text{tang. A C} = \frac{\sqrt{\text{ſin.}\,b\ \text{ſin.}\,c\ \text{ſin.}(s-a)}}{\text{coſ.}(s-a)\sqrt{\text{ſin.}\,s}}.$$

 Tum

Tum vero quoque habetur:

$$\text{coſ. } ACE = \text{coſ. } AE \text{ ſin. } EAC = \text{coſ. }(s-a) \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} A$$
$$\text{coſ. }(s-a) \sqrt{\frac{\text{ſin. }(s-c) \text{ ſin. }(s-b)}{\text{ſin. } b \text{ ſin. } c}},$$

itidem per §. 12.

Tab. III. Fig. 4. §. 26. Theorema XIX. *Si triangulo A B C, circulus ſit circumſcriptus et alius ipſi inſcriptus, tumque diſtantia Poli prioris circuli a puncto A indigitetur per* r, *diſtantia vero Poli poſterioris circuli ab arcu AB per* r', *erit*

$$\text{tang. } r \,.\, \text{tang. } r' = \frac{2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} a \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} b \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} c}{\text{ſin. } s},$$

deſignatis nimirum lateribus trianguli reſpectiue per a, b, c *et poſito* $s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$.

Demonſtr. Per Theor. XIII. eſt

$$\text{tang. } r = \frac{2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} a \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} b \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} c}{\sqrt{\text{ſin. } s \text{ ſin. }(s-a) \text{ ſin. }(s-b) \text{ ſin. }(s-c)}},$$

et per Theorema XVI.

$$\text{tang. } r' = \sqrt{\frac{\text{ſin. }(s-a) \text{ ſin. }(s-b) \text{ ſin. }(s-c)}{\text{ſin. } s}}, \text{ hinc}$$

$$\text{tang. } r \text{ tang. } r' = \frac{2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} a \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} b \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} c}{\text{ſin. } s}.$$

§. 27. Theorema XX. *Iisdem poſitis eſt*

$$\text{tang. } r \text{ tang. } r' = \frac{-\text{ coſ. } S}{2 \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} A \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} B \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} C},$$

deſignatis nimirum angulis reſpective per A, B, C et poſito

$$S = \tfrac{1}{2}(A + B + C).$$

De-

Demonſtr. Per Theor. XV. eſt

$$\text{tang.}\, r = \sqrt{\frac{-\,\text{coſ.}\, S}{\text{coſ.}\,(S-A)\,\text{coſ.}\,(S-B)\,\text{coſ.}\,(S-C)}},$$

et per Theor. XVIII.

$$\text{tang}\, r' = \frac{\sqrt{-\,\text{coſ.}\, S\,\text{coſ.}\,(S-A)\,\text{coſ.}\,(S-B)\,\text{coſ.}\,(S-C)}}{3\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C},$$

vnde liquet propoſitum. Simili quoque ratione colligitur eſſe

$$\frac{\text{tang.}\, r'}{\text{tang.}\, r} = \frac{\text{ſin.}\,(s-a)\,\text{ſin.}\,(s-b)\,\text{ſin.}\,(s-c)}{2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c}, \text{ vel}$$

$$\frac{\text{tang.}\, r'}{\text{tang.}\, r} = \frac{\text{coſ.}\,(S-A)\,\text{coſ.}\,(S-B)\,\text{coſ.}\,(S-C)}{2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C}.$$

§. 28. Hac occaſione non praeter rem erit vt oſtendamus, quomodo hae proprietates inuentae analogae ſint illis, quae pro triangulis planis locum obtinent. Sic ſi $\triangle$ A B D ſupponatur eſſe planum, habebitur loco Theorematis XI, hoc Theorema: $2\,BL = \frac{AB\,.\,BD}{BC}$; loco Theor. XII. vero iſtud: Tab. III. Fig. 2.

$$BL = \frac{2\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{b},$$

Theorem. vero XIII. in iſthoc mutatur:

$$BC = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}},$$

vbi area trianguli

$$ABD = \tfrac{1}{2}\,BL\,.\,AD = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

vnde

$$4\,BC\,.\,\triangle\,ABD = a\,b\,c.$$

Theoremat. XIV et XV. adplicatio ad triangula plana fieri quidem non poteſt, interim tamen obſeruare conuenit,

quia

quia aream trianguli Sphaerici per ſummam angulorum in iſto triangulo determinatur, etiam Theor. XIV. analogiam habere cum iſto pro triangulis rectilineis, vbi ſtatuitur

$$4 BC \triangle ABD = AB \cdot BD \cdot AD.$$

Theorema XVI. ad triangula plania traductum dat

$$r' = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

ex Theoremate vero XVII iſtud colligitur

$$r' = s \text{ tang.} \tfrac{1}{2} A \text{ tang.} \tfrac{1}{2} B \text{ tang.} \tfrac{1}{2} C;$$

hincque iſtud Theorema elicitur analogum Theoremati XIX: $r\, r' = \frac{a\,b\,c}{4\,s}$, vel $\frac{r'}{r} = \frac{4\,(s-a)(s-b)(s-c)}{a\,b\,c}$.

Tab. III. Fig 6. §. 29. Theorema. XXI. *Si circulo minori ABC inſcriptum fuerit quadrilaterum ABDC, ex arcubus circulorum maximorum compoſitum, et ducti conpiciantur arcus circuli maximi BC, AD, diagonales huius quadrilateri, erit*

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} AD \text{ ſin} \tfrac{1}{2} BC = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AB \,.\, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} DC + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AC \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} BD.$$

Demonſtr. Sit G polus circuli minoris et ex hoc Polo ducantur arcus circulorum maximorum GA, GB, GD, GC, vt etiam GF, GH normales ad BC, AD et iungatur GE, erit itaque

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} BGD = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} (AGB + AGC + CGD),$$

hinc

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} BGD \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} AGC = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AGC \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} (AGB + AGD)$$
$$= \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AGC \text{ coſ.} \tfrac{1}{2} AGB \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} AGD$$
$$+ \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AGC \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} AGD \text{ coſ.} \tfrac{1}{2} AGB.$$

Similiter fiet

ſin.

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGB\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}DGC = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGB\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AGC\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGD - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGB\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AGD\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGC$$

hincque

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BGD\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGC + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGB\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}DGC$$
$$= \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGD\,(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGC\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AGB + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGB\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AGC)$$
$$= \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGD\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BGC.$$

Quum itaque ſit

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BD = \text{ſin.}BG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BGD;$$
$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AC = \text{ſin.}BG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGC;$$
$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AB = \text{ſin.}BG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGB;$$
$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}DC = \text{ſin.}BG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}DGC;$$
$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AD = \text{ſin.}BG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AGD;$$
$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BC = \text{ſin.}BG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BGC;$$

fiet omnino

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AD\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BC = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AB\,\text{ſin}\tfrac{1}{2}DC + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}BD\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AC.$$

§. 30. Theorema. XXII. *Iisdem poſitis eſt*

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AD^2 = \frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AB\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AC + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}BD\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}DC)(\text{ſ.}\tfrac{1}{2}AB\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}DC + \text{ſ.}\tfrac{1}{2}AC\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}BD)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}AB\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BD + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AC\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}DC}.$$

Demonſtr.

$$\text{ſin.}BE : \text{ſin.}EC = \text{ſin.}AB\,\text{ſin.}BAD : \text{ſin.}AC\,.\,\text{ſin.}DAC,$$

atqui per Theor. VIII.

$$\text{ſin.}BAD = \frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}BGD\,\text{coſ.}BG}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AB\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AD} = \frac{\text{ſin}\tfrac{1}{2}BD\,.\,\text{cot.}BG}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AB\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}AD},$$

nec non

$$\text{ſin. } DAC = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} DC \, . \, \text{cot. } BG}{\text{coſ. } \frac{1}{2} AC \, \text{coſ. } \frac{1}{2} AD},$$

hinc fit

$$\text{ſin. } BE : \text{ſin. } EC = \frac{\text{ſin. } AB \, . \, \text{ſin. } \frac{1}{2} BD}{\text{coſ. } \frac{1}{2} AB} : \frac{\text{ſin. } AC \, \text{ſin. } \frac{1}{2} DC}{\text{coſ. } \frac{1}{2} AC}$$

$$= \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} BD \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AC \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} DC,$$

vnde

$$\text{ſin. } BE + \text{ſin. } EC : \text{ſin. } EC = 2 \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} BC \, \text{coſ. } EF : \text{ſin. } EC$$

$$= \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \, . \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} BD + \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AC \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} \text{ſin. } \tfrac{1}{2} DC : \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AC \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} DC.$$

Simili ratione demonſtratur eſſe

$$2 \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AD \, \text{coſ. } EH : \text{ſin. } AE = \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AE$$

$$+ \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} BD \, . \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} DC : \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \, . \, \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AC.$$

Erit igitur:

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} BC : \text{ſin. } \tfrac{1}{2} AD = \text{ſin. } EC \, \frac{(\text{ſin. } \frac{1}{2} AB \, . \, \text{ſin. } \frac{1}{2} BD + \text{ſin. } \frac{1}{2} AC \, \text{ſin. } \frac{1}{2} DC)}{\text{coſ. } EF \, \text{ſin. } \frac{1}{2} DC}$$

$$: \text{ſin. } AE \, \frac{(\text{ſin. } \frac{1}{2} AB \, \text{ſin. } \frac{1}{2} BC + \text{ſin. } \frac{1}{2} AC \, \text{ſin. } \frac{1}{2} BD)}{\text{coſ. } EH \, . \, \text{ſin. } \frac{1}{2} AB}.$$

At in triangulo AEC eſt

$$\text{ſin. } EC : \text{ſin. } AE = \text{ſin. } DAC : \text{ſin. } BCA$$

$$= \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} DC}{\text{coſ. } \frac{1}{2} AD} : \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} AB}{\text{coſ. } \frac{1}{2} BC}$$

per Theor. VIII., hinc fiet

$$\frac{\text{ſin. } EC}{\text{ſin. } \frac{1}{2} CD} : \frac{\text{ſin. } AE}{\text{ſin. } \frac{1}{2} AB} = \text{coſ. } \tfrac{1}{2} BC : \text{coſ. } \tfrac{1}{2} AD.$$

At eſt

$$\text{coſ. } \tfrac{1}{2} BC : \text{coſ. } \tfrac{1}{2} AD = \text{coſ. } GH : \text{coſ. } GF = \text{coſ. } EF : \text{coſ. } EH,$$

pro-

proinde erit

$$\frac{\text{ſin. } EC}{\text{ſin. } \tfrac{1}{2} DC \text{ coſ. } EF} = \frac{\text{ſin. } AE}{\text{ſin. } \tfrac{1}{2} AB \text{ coſ. } EH},$$

ideoque

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} BC : \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AD = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AB \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} BD + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AC \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} DC : \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AB \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AC + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} BD \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} DC,$$

vnde ob

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} BC \, . \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AD = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AB \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} DC + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} AC \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} BD,$$

per Theorema praecedens, pro $\text{ſin.} \tfrac{1}{2} BC^2$ obtinetur valor Theoremate noſtro expreſſus.

§. 31. Si breuitatis gratia exprimantur arcus AB, BD, DC, AC, AD, BC reſpectiue per litteras a, b, c, d, e, f, fiet

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} f^2 = \frac{(\text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d)(\text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d)}{\text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c},$$

$$\begin{aligned} \text{coſ.} \tfrac{1}{2} f^2 = 1 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} f^2 = \tfrac{1}{Q} (&\text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} a^2 \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c \\ &- \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b^2 \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c^2 \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d^2 \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c) \\ = \tfrac{1}{Q} (&\text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d (1 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b^2 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c^2) + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c (1 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} a^2 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d^2), \end{aligned}$$

vbi

$$Q = \text{ſin.} \tfrac{1}{2} a \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} d + \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c.$$

Atqui eſt

$$\begin{aligned} 1 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b^2 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c^2 &= \frac{2 - 2 \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} b^2 - 2 \, \text{ſin.} \tfrac{1}{2} c^2}{2} = \frac{\text{coſ.} \, b + \text{coſ.} \, c}{2} \\ &= \text{coſ.} \tfrac{1}{2} (b + c) \, \text{coſ.} \tfrac{1}{2} (b - c); \end{aligned}$$

 ſimi-

ſimilique ratione fit

$$1 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}d^2 = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d),$$

vnde denique colligitur

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}f^2 = \tfrac{1}{Q}(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b-c)$$
$$+ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d)).$$

§. 32. Theorema XXIII. *Iisdem adhibitis denominationibus ſi ponatur arcus* $BG = R$, *erit*

$$\text{tang.}\,R = \frac{M}{2N}, \text{ vbi}$$

$$M = \sqrt{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d)}$$
$$\overline{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)}$$

$$\text{et } N^2 = \left\{\begin{array}{r} \text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d) \\ \text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a) \\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+c-b-d) \\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+d-b-c) \end{array}\right\}.$$

Demonſtr. Per Theor. XIII. habetur

$$\text{tang.}R = \frac{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f}{\sqrt{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+d+f)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+d-f)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a-d+f)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(d+f-a)}},$$

denominator autem huius expreſſionis ita quoque per quatuor factores exprimi poteſt:

$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}f + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f)$$
$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}f - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f)$$
$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d) + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}f\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a-d))$$
$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d) - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}f\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a-d))$$

Binorum factorum priorum in hoc denominatore productum igitur eſt

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+d)^2\text{coſ.}\tfrac{1}{2}f^2 - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d)^2\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f^2 = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}f^2 - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d)^2;$$

et binorum factorum poſteriorum productum

coſ.

$$\cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 \sin\tfrac{1}{2}f^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2 \cos\tfrac{1}{2}f^2 = \cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos\tfrac{1}{2}f^2.$$

Subſtituto autem valore pro coſ. $\tfrac{1}{2}f^2$ ex §. 31. fit:

$$\begin{aligned}(\cos\tfrac{1}{2}f^2 - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)^2)&(\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c)\\ &= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d\,(\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)^2)\\ &+ \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c\,(\cos\tfrac{1}{2}(a+d)\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)^2).\end{aligned}$$

Hinc quum ſit

$$\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d) = 2\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d, \text{ et}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c) = 2\sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c,$$

fiet

$$\begin{aligned}(\cos\tfrac{1}{2}f^2 - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)^2)&(\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c)\\ &= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d\,(\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)^2\\ &+ \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\cos\tfrac{1}{2}(b+c))\\ &= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d \left\{\begin{matrix}\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\\ \cos\tfrac{1}{2}(b+c) + \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\end{matrix}\right\}\\ &= 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d \left\{\begin{matrix}\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+d-b+c)\\ \cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a+d-b-c)\end{matrix}\right\}.\end{aligned}$$

Simili ratione eſt:

$$\begin{aligned}(\cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos\tfrac{1}{2}f^2)&(\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b . \sin\tfrac{1}{2}c)\\ &= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d\,(\cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c))\\ &+ \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c\,(\cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\cos(a-d))\\ &= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d\,(\cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\\ &+ \cos\tfrac{1}{2}(a-d)\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a-d)\cos\tfrac{1}{2}(b+c))\\ &= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d \left\{\begin{matrix}\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\\ \cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\end{matrix}\right\}\\ &= 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d \left\{\begin{matrix}\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\ \cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\end{matrix}\right\}.\end{aligned}$$

Hinc bina haec producta colligendo fiet

$$(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}f^2-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d)^2)(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d)^2-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}f^2)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)^2=$$

$$16\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d^2\begin{pmatrix}\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſi.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſi.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\ \text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\end{pmatrix}$$

tum vero quia eſt

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f^2=\frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d)\,(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c},$$

fiet omnino tang. $R=\frac{M}{2N}$, exiſtente

$$M^2=(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d)$$
$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d)$$
$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)\text{ et}$$

$$N^2=\begin{Bmatrix}\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſi.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſi.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\\ \text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\end{Bmatrix}.$$

§. 33. Quia in triangulo Sphaerico BAD habetur

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a-d+f)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(f+d-a)}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,d}\text{ et}$$

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+d+f)\,(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+d-f)}{\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,d},\text{ erit}$$

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A^2\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,d=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d)^2-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}f^2=$$

$$4\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſ}\tfrac{1}{2}d\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c}$$

et $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A^2\,\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,d=$

$$4\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}d\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c}.$$

Hinc fiet

$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}d\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A^2$$
$$=\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d);$$

(ſin.

$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}d\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A^2$$
$$=\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d),$$

nec non

$$\text{tag.}\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)},$$

ex quibus formulis angulus A per tria quadrilateri latera determinatur. Hic autem conſimiles formulae pro reliquis angulis B, D, C tradi poſſunt. Sic pro angulo D erit

$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D^2$$
$$=\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(b-c+a-d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(b-c-a+d);$$

$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D^2$$
$$=\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d);$$

hinc colligitur:

$$\begin{aligned}\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+D)&=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D\\&=\tfrac{\mu}{\nu}\left(\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-a)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\right)\\&+\tfrac{\mu}{\nu}\left(\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\right)\text{ et}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+D)&=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D\\&=\tfrac{\mu'}{\nu'}\left(\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\right)\\&-\tfrac{\mu'}{\nu'}\left(\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\right),\end{aligned}$$

exiſtente

$$\mu=\sqrt{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)};$$

$$\nu=\sqrt{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}d)\,(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin}\tfrac{1}{2}d+\text{ſin}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)};$$

$$\mu=\sqrt{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)}$$

$\nu' = \nu$

$y' = v$. Hinc ob

$$2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a) = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d) - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b+c);$$

$$2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d) = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b-c) - \text{coſ}\,\tfrac{1}{2}(a+d);$$

et

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d) - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d) = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d;$$

nec non

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b-c) - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b+c) = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c,$$

fiet omnino

$$+\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)$$
$$+\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)$$
$$= \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c;$$

ſimilique ratione ob

$$2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)$$
$$= \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+d) + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b+c);$$
$$2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)$$
$$= \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-d) + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(b-c);$$

hinc fiet

$$+\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)$$
$$-\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)$$
$$= -\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d;$$

vnde erit

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+D)$$
$$= \frac{\sqrt{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)}}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}d},$$

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+D)$$
$$= -\sqrt{\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}d}}.$$

Tum

Tum vero facile liquet pro ſin. $\tfrac{1}{2}(B+C)$ et coſ. $\tfrac{1}{2}(B+C)$ easdem prodire formulas ac hic pro ſin. $\tfrac{1}{2}(A+D)$, coſ. $\tfrac{1}{2}(A+D)$ elicuimus, ex quo redditur manifeſtum eſſe $A+D=B+C$, quod etiam alioquin ſponte patet. Hincque demum fit

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B+C+D)=\text{ſin.}(A+D)$$

$$=2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+D)=\frac{-2\sqrt{\mu\,\mu'}}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}d}.$$

§. 34. Si vſus adhibeatur ſequentium formularum:

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\,\text{cſ}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cl.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)}},$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)}}$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}D=\sqrt{\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{ſi.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(b-c+d-a)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(b-c-d+a)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſi.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)}}$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-a)}}$$

ſequentes inde eliciuntur relationes:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}B\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}C\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}D=\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)^2}{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)^2}.$$

$$\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}A\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}B}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}C\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}D}=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(b+c+d-a)^2}{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)^2};$$

$$\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}A\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}C}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}B\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}D}=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)^2}{\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)^2};$$

$$\frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}A\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}D}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}B\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}C}=\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)^2}{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)^2}.$$

 Hinc

Hinc ſi breuitatis gratia exprimantur tang. $\frac{1}{2}$ A ; tang. $\frac{1}{2}$ B ; tang. $\frac{1}{2}$ C ; tang. $\frac{1}{2}$ D reſpectiue per litteras p, q, r, s, fiet,

$$\frac{\text{coſ.}\,\frac{1}{4}(a-b+c-d)}{\text{coſ.}\,\frac{1}{4}(a+b+c+d)}=\sqrt{pqrs};\quad \frac{\text{coſ.}\,\frac{1}{4}(a+b-c-d)}{\text{coſ.}\,\frac{1}{4}(a-b-c+d)}=\sqrt{\frac{ps}{rq}};$$

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{4}(b+c+d-a)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{4}(a+b-c+d)}=\sqrt{\frac{pq}{rs}};\quad \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{4}(a+b+c-d)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{4}(a-b+c+d)}=\sqrt{\frac{pr}{qs}}.$$

Hinc autem colligitur:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(a+c)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(b+d)=\frac{1-\sqrt{pqrs}}{1+\sqrt{pqrs}};$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(a-c)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(b-d)=\frac{\sqrt{rq}-\sqrt{ps}}{\sqrt{rq}+\sqrt{ps}};$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(a-c)\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{4}(b+d)=\frac{\sqrt{pq}-\sqrt{rs}}{\sqrt{pq}+\sqrt{rs}};$$

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{4}(a+c)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(b-d)=\frac{\sqrt{pr}-\sqrt{qs}}{\sqrt{pr}+\sqrt{qs}},$$

indeque

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(a+c)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(a-c)=\frac{1-\sqrt{pqrs}}{1+\sqrt{pqrs}}\cdot\frac{\sqrt{pq}-\sqrt{rs}}{\sqrt{pq}+\sqrt{rs}}$$
$$=\frac{(1+rs)\sqrt{pq}-(1+pq)\sqrt{rs}}{(1+rs)\sqrt{pq}+(1+pq)\sqrt{rs}};$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(b+d)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(b-d)=\frac{1-\sqrt{pqrs}}{1+\sqrt{pqrs}}\cdot\frac{\sqrt{pr}-\sqrt{qs}}{\sqrt{pr}+\sqrt{qs}}$$
$$=\frac{(1+qs)\sqrt{pr}-(1+pr)\sqrt{qs}}{(1+qs)\sqrt{pr}+(1+pr)\sqrt{qs}}.$$

Hinc autem deducitur

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}c:\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a=(1+rs)\sqrt{pq}:(1+pq)\sqrt{rs}=\frac{\sqrt{pq}}{1+pq}:\frac{\sqrt{rs}}{1+rs}\ \text{et}$$

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}d:\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}b=(1+qs)\sqrt{pr}:(1+pr)\sqrt{qs}=\frac{\sqrt{pr}}{1+pr}:\frac{\sqrt{qs}}{1+qs},$$

vnde colligitur

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}c:\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\sqrt{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}A\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}B\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}B}}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(A-B)}:$$

$$\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}C\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}D\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}D}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(C-D)}}=\sqrt{\text{ſin.}A\,\text{ſin.}B}:\sqrt{\text{ſin.}C\,\text{ſin.}D}$$

ob $A-B=C-D$, quae proprietas aliunde quoque demon-

monſtrari poteſt. Caeterum quamuis hic quatuor aequationes prodeant pro tangentibus angulorum in quadrilatero, tamen illae non ſufficere cenſendae ſunt pro determinandis lateribus *a*, *b*, *c*, *d* ex datis angulis A, B, D, C, ſiquidem inter iſtos angulos iſta relatio per ſe intelligitur ſuppoſita, vt ſit A + D = B + C. Et leui quidem adhibita attentione patet, ſi anguli quadrilateri ſupponantur cogniti, inde ipſum quadrilaterum non determinari, id eſt infinita aderunt quadrilatera, circulis inſcriptibilia in quibus iidem inſunt anguli.

§. 35. Praeter quadrilatera eius generis ac ABDC, vbi inflexiones angulorum in eundem ſenſum fiunt, dantur quoque alia eius generis ABCDA, vbi inflexiones angulorum BCD, CDA fiunt in ſenſum contrarium illi, ſecundum quem anguli ABC, BAD habentur inflexi. Reſtat igitur vt nunc quoque examinemus, quomodo ex datis ſingulis lateribus huiusmodi quadrilateri, circulus derminari queat, cui hoc quadrilaterum inſcribi ſe patitur. Heic autem ſi arcus AC, BD vt diagonales iſtius quadrilateri conſiderentur, erit per Theor. XXI. Tab. III. Fig. 6.

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}d = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c,$$

tum vero ſequens quoque habebitur

Theorema XXIV, *quod ſit*

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b^2 = \frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f},$$

cuius demonſtratio ita adornatur:

Concipiantur arcus circulorum maximorum AC, BD producti vsque dum ſibi inuicem occurrant in K, et

ex polo circuli minoris G ducantur in arcus A C, B D arcus circuli maximi normales G M, G L, eritque

$$\text{ſin. KD} : \text{ſin. KB} = \text{ſin. AD. ſin. DAK} : \text{ſin. AB. ſin. BAK}, \text{ at}$$

$$\text{ſin. DAK} = \frac{\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC cot. BG}}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2}\text{AD coſ. } \tfrac{1}{2}\text{AC}}; \ \text{ſin. BAK} = \frac{\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC cot. BG}}{\text{coſ. } \tfrac{1}{2}\text{AB coſ. } \tfrac{1}{2}\text{AC}}$$

ideoque

$$\text{ſin. KD} : \text{ſin. KB} = \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD} : \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AB};$$

ſimilique ratione

$$\text{ſin. KC} : \text{ſin. KA} = \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC} : \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AB},$$

ex quo colligitur

$$\text{ſin. BK} - \text{ſin. DK} : \text{ſin. DK} = \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AB. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC} - \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD} : \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC}; \text{ ſiue}$$

$$2\,\text{coſ. KL. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BD} : \text{ſin. DK} = \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AB. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC} - \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD} : \text{ſin } \tfrac{1}{2}\text{AD. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC}, \text{ ob}$$

$$\tfrac{1}{2}(\text{BK} + \text{DK}) = \text{KL}, \text{ et } \tfrac{1}{2}(\text{BK} - \text{DK}) = \tfrac{1}{2}\text{BD}.$$

Eadem ratione fit

$$2\,\text{coſ. KM. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AC} : \text{ſin. CK} = \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AB} - \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC} : \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC. ſin. DC}$$

et ex his denique fiet

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BD} : \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AC} = \text{ſin. DK} \frac{(\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AB. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC} - \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{DC. ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD})}{\text{coſ. KL ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD}}$$

$$: \text{ſin. CK} \frac{(\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AD ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AB} - \text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC. ſin } \tfrac{1}{2}\text{DC})}{\text{coſ. KM ſin. } \tfrac{1}{2}\text{BC}}.$$

Atqui eſt

$$\text{coſ. KL} : \text{coſ. KM} = \text{coſ. GM} : \text{coſ. GL} = \text{coſ. } \tfrac{1}{2}\text{BD} : \text{coſ. } \tfrac{1}{2}\text{AC}, \text{ et}$$

ſin.

$$\text{ſin.}\,DK : \text{ſin.}\,CK = \text{ſin.}\,ACD : \text{ſin.}\,BDC$$

$$= \frac{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}AD\,\text{cot.}\,BG}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}AC.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}CD} : \frac{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}BC.\,\text{cot.}\,BG}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}BD.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}CD}$$

$$= \frac{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}AD}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}AC} : \frac{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}BC}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}BD},$$

ex quo omnino concluditur eſſe

$$\frac{\text{ſin.}\,DK}{\text{coſ.}\,KL.\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}AD} = \frac{\text{ſin.}\,CK}{\text{coſ.}\,KM.\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}BC};$$

hincque fiet interductis denominationibus arcuum,

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}b : \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}d = \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e :$$
$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f,$$

vnde liquet id quod in Theoremate eſt propoſitum.

§. 36. Si loco denominatoris

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f$$

breuitatis gratia ſcribatur Q, fiet

$$Q\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}b^2 = Q(1 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}b^2) = \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f$$
$$- \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f^2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f$$
$$+ \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e^2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c^2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e$$
$$= \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e(1 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c^2)$$
$$- \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f(1 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a^2),$$

vnde ob

$$1 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}f^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}c^2 = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(f+c)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(f-c); \text{ et}$$
$$1 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}a^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}e^2 = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(a+f)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(f-a),$$

habebitur

$$Q\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b^2 = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}e\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(f+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(f-c)$$
$$-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}f\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(f+a)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(f-a).$$

§. 37. Theorema XXV. *Si ponatur diſtantia* Poli *a peripheria* $BG = R$ *erit nunc tang.* $R = \frac{M}{2N}$, *exiſtente*

$$M^2 = (\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)$$
$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f),\ \text{et}$$

$$N^2 = \begin{cases}\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+f+c+e)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+f-c-e)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-f-c+e)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{4}(f-c+e-a)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(a+f+c-e)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a+f-c+e)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(a-f+c+e)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(f+c+e-a)\end{cases}$$

Demonſtr. Si conſideretur triangulum A B D, eſt

$$\text{tang.}R = \frac{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b}{\sqrt{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+b+e)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+b-e)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a-b+e)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(b+e-a)}};$$

in denominatore igitur pro $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b$, $\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b$ eius valores in ſuperioribus allatos introducere conuenit, habebimus igitur denominatorem ita expreſſum:

$$\begin{cases}(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+e)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}b)(\text{ſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}b)\\ (\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a-e)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-e)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}b)(\text{ſ.}\tfrac{1}{2}(a-e)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-e)\,\text{ſ.}\tfrac{1}{2}b)\end{cases}$$

Priorum binorum factorum productum eſt

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b^2$$
$$= \text{coſ.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2;$$

et binorum poſteriorum factum

$$-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a-e)^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b^2 + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-e)^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b^2$$
$$= \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a-e)^2 - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}b^2.$$

Subſtituto nunc pro $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b^2$ eius valore ex §. antecedenti

$$(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f)$$
$$= \text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(f+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(f-c) - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2)$$
$$-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(e+a)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(e-a) - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+e)^2).$$

Igi-

Igitur cuum ſit

$$\cos\tfrac{1}{2}(e-a)-\cos\tfrac{1}{2}(e+a)=2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e \text{ et}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(f-c)-\cos\tfrac{1}{2}(f+c)=2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f,$$

fiet omnino

$$\begin{aligned}&(\cos\tfrac{1}{2}b^2-\cos\tfrac{1}{2}(a+e)^2)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f)=\\&\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e(\cos\tfrac{1}{2}(f+c)\cos\tfrac{1}{2}(f-c)-\cos\tfrac{1}{2}(a+e)^2\\&-\cos\tfrac{1}{2}(a+e)\cos\tfrac{1}{2}(f-c)+\cos\tfrac{1}{2}(a+e)\cos\tfrac{1}{2}(f+c))\\&=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e(\cos\tfrac{1}{2}(f-c)+\cos\tfrac{1}{2}(a+e))(\cos\tfrac{1}{2}(f+c)-\cos\tfrac{1}{2}(a+e))\\&=4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+e+f+c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+e-f-c)\\&\quad\cos\tfrac{1}{4}(a+e+f-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+e-f+c).\end{aligned}$$

Similique ratione fiet

$$\begin{aligned}&(\cos\tfrac{1}{2}(a-e)^2-\cos\tfrac{1}{2}b^2)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f)\\&=4\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-e+f-c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-e-f+c)\\&=\cos\tfrac{1}{4}(a-e+f+c)\cos\tfrac{1}{4}(e+f+c-a).\end{aligned}$$

Hinc bina iſta producta collectim ſumendo fiet

$$(\cos\tfrac{1}{2}b^2-\cos\tfrac{1}{2}(a+e)^2)(\cos\tfrac{1}{2}(a-e)^2-\cos\tfrac{1}{2}b^2)\,Q^2=$$

$$16\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e^2\left\{\begin{matrix}\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+e+f+c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a+e-f-c)\\\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-e+f-c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{4}(a-e-f+c)\\\cos\tfrac{1}{4}(a+e+f-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+e-f+c)\\\cos\tfrac{1}{4}(a-e+f+c)\cos\tfrac{1}{4}(e+f+c-a)\end{matrix}\right\}$$

vnde ſi ſimul pro $\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b^2$ ſubſtituatur eius valor

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}b^2=\frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}e-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}f},$$

patet expreſſionem pro tang. R in Theoremate propoſitam recte ſibi conſtare.

§. 38

Tab. III. Fig. 7. §. 38. Si quadrilatero A B C D inſcriptus fuerit circulus minor L H I K, eius polo in G exiſtente, atque iungantur G A, G B, G C, G D arcubus circulorum maximorum, tumque ducantur arcus circulor. maxim. G H, G I, G K, G L normales ad latera quadrilateri, erunt ſinguli hi arcus inter ſe aequales, tumque facile patet angulos L A H, H G L, H B I, H G I, I C K, I G K, L D K, L G K biſecari per arcus G A, G B, G C, G D. Praeterea producantur arcus A D, B C vsque dum inuicem occurrant in E et iungatur E G arcu circuli maximi, vt etiam L I, H K, H L, H I, I K et L K arcubus circulorum maximorum. Per ea igitur quae ſupra Theoremate XXII demonſtrauimus, conſtat eſſe:

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LI^2 = \frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}HI\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}IK + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}LK\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}HG)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}HL\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LK + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}HI\,\text{ſi.}IK)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}HL\,.\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}HI + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}LK\,.\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}IK}.$$

Eſt vero

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LI = \text{ſin.}LG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LGI = \text{ſin.}LG\,\text{ſin.}LGE,$$

tum vero eſt

$$\text{ſin.}LGE\,\text{coſ.}LG = \text{coſ.}LEG,$$

ob angulum G L E rectum, ideoque

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LI = \text{tang.}LG\,.\,\text{coſ.}LEG.$$

Simili modo fiet

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}HL = \text{ſin}\,LG\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LGH = \text{tang.}LG\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}HAL;$$

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}HI = \text{ſin.}LG\,.\,\text{ſin}\tfrac{1}{2}HGI = \text{tang.}LG\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}HBI;$$

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}IK = \text{ſin.}LG\,.\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}IGK = \text{tang.}LG\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}ICK;$$

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LK = \text{ſin.}LG\,.\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}LGK = \text{tang.}LG\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}LDK;$$

vnde ſi breuitatis gratia anguli, H A L, H B I, I C K, L D K,

LDK, LEG exprimantur per A, B, C, D, E, fiet

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 = \frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D)(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C)}{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D}.$$

§. 39. Theorema XXVI. *Conſtructione prioris §. adhibita, ſi arcus* LG *exprimatur per* R′ *erit* tang. $R' = \frac{2N}{2M}$, *exiſtente*

$$M^2 = (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D)(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C)(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D)\ \text{et}$$

$$N^2 = -\left\{\begin{array}{l}\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\\ \qquad\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\\ \qquad\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\end{array}\right\}.$$

Demonſtratio. In triangulo ABE fit per Theorema noſtrum XVIII.

$$\text{tang.}R' = \frac{\sqrt{-\text{cſ.}\tfrac{1}{2}(A+B+E)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{2}(A+B-E)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{2}(A-B+E)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{2}(B+E-A)}}{2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E}.$$

Euoluatur nunc quadratum numeratoris in hac expreſſione, quod igitur erit

$$-\left\{\begin{array}{l}(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}F)\\ (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}E)\\ (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-E)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}E)\\ (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}E)\end{array}\right\}$$

$$= -\left\{\begin{array}{l}(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2) - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}E^2)\\ (\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-B)^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2) - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-B)^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}E^2)\end{array}\right\}$$

Loco primi factoris adhiberi poteſt,

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2 = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 - 1 + \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2;$$

 et

et loco poſterioris

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}(A-B)^2 = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 - 1 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)^2,$$

hinc igitur ſi breuitatis gratia loco

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D$$

ſcribatur Q, fiet

$$\begin{aligned} Q\,(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)^2) &= \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D \\ &+ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B \\ &+ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D - \text{cſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{c.}\,\tfrac{1}{2}B + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B\,\text{cſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)^2 \\ &- \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)^2 \\ &= \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B\,(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D^2 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C^2 - 1 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B^2)) \\ &+ \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D\,(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2 - 1 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)^2). \end{aligned}$$

Atqui eſt

$$\begin{aligned} \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D^2 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C^2 - 1 &= \tfrac{1}{2}(\text{coſ.}\,D + \text{coſ.}\,C) \\ &= \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(D+C)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(D-C); \end{aligned}$$

ſimilique ratione

$$\begin{aligned} \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2 - 1 &= \tfrac{1}{2}(\text{coſ.}\,A + \text{coſ.}\,B) \\ &= \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A-B), \end{aligned}$$

tumque fiet

$$\begin{aligned} &\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D\,(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A^2 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B^2 - 1 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)^2) \\ &= \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A-B) + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A-B)) \\ &= 2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B) \\ &= \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}B \left\{ \begin{array}{l} \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(C-D) \\ + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(C+D) \end{array} \right\} \text{ ob} \end{aligned}$$

$$2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}D = \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(C-D) + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(C+D);$$

hinc ſubſtitutione facta, fiet

coſ.

$$\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}C^2+\cos.\tfrac{1}{2}D^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B^2))$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D\,(\cos.\tfrac{1}{2}A^2+\cos.\tfrac{1}{2}B^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)^2)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)\cos.\tfrac{1}{2}(C-D))$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)^2+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B))$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A+B))$$
$$=4\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(c\text{ſ}.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,c\text{ſ}.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)$$
$$\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D).$$

Tum vero ſimili ratione oſtenditur fore pro poſteriori factore

$$Q\,(\cos.\tfrac{1}{2}E^2+\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}D^2+\cos.\tfrac{1}{2}C^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B^2))$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}C\cos.\tfrac{1}{2}D\,(\cos.\tfrac{1}{2}A^2+\cos.\tfrac{1}{2}B^2-1+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(D+C)\,c\text{ſ}.\tfrac{1}{2}(D-C)+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\cos.\tfrac{1}{2}(D-C)$$
$$+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\cos.\tfrac{1}{2}(D+C)$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\,(\cos.\tfrac{1}{2}(C+D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B))$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}(C-D)+\cos.\tfrac{1}{2}(A-B))$$
$$=4\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,c\text{ſ}.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)$$
$$\cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D).$$

Hincque collectim ſumendo obtinetur:

$$-Q^2(\cos.\tfrac{1}{2}E^2-\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)^2)\,(\cos.\tfrac{1}{2}E^2-\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)^2)$$
$$=-16\,c\text{ſ}.\tfrac{1}{2}A^2\,c.\tfrac{1}{2}B^2\left\{\begin{matrix}\cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\cos.\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \cos.\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\cos.\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\end{matrix}\right\}$$
$$=+16\cos.\tfrac{1}{2}A^2\cos.\tfrac{1}{2}B^2\,.\,N^2,$$

 vnde

vnde quum ſit

$$\text{tang.}\,R'^2 = -\frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2)(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-B)^2)}{4\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2}$$

et $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 = \frac{M}{Q^2}$, fiet omnino

$$\text{tang.}\,R'^2 = -Q^2\frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+B)^2)(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}E^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-B)^2)}{4\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2\,.\,M}$$

$$= \frac{16\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2\,.\,N^2}{4\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2\,.\,M^2};$$

proinde $\text{tang.}\,R'^2 = \frac{4N^2}{M}$.

§. 40. Vti articulo 34 obſeruauimus ex datis quadrilateri angulis circulum non determinari, qui huic quadrilatero in ſuperficie Sphaerica circumſcribi poteſt, ita viciſſim ex datis lateribus, circulus non determinatur iſti quadrilatero inſcriptus; quippe quum pro quadrilatero A B C D circulo L H I K circumſcripto eſt

$$AD + BC = AB + DC;$$

ita vt datis tribus horum laterum quartum per ſe determinetur; ideoque quum infinita conſtrui poſſint quadrilatera, quae ex iſtis quatuor lateribus componuntur, patet circulum quadrilatero inſcriptum ex meris lateribus non determinari. Caeterum heic quoque obſeruari meretur eſſe angulos ad polum conſtitutos A G B, B G C, C G D, D G A, ita comparatos vt bini oppoſiti A G B, D G C vel A G D, A G C faciant ſummam aequalem duobus rectis, eſt enim $AGB = \tfrac{1}{2}LGI$ et $DGC = \tfrac{1}{2}(360 - LGI)$, ideoque $AGB + DGC = 180°$.

§. 41.

§. 41. Si in triangulo Sphaerico ABE latus AB per a exprimatur, erit ex cognitis proprietatibus triangulor. Sphaericorum:

$$\frac{\text{coſ. E} + \text{coſ. A coſ. B}}{\text{ſin. A ſin. B}} = \text{coſ. } a;$$

hincque

$$\frac{\text{coſ. E} + \text{coſ. (A - B)}}{\text{ſin. A ſin. B}} = 2 \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} a^2 - \frac{\text{coſ. E} - \text{coſ. (A + B)}}{\text{ſin. A ſin. B}} = 2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} a^2;$$

ſiue ob $\text{coſ. E} = 2 \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} \text{E}^2 - 1$;

$$\text{coſ. (A - B)} = 1 - 2 \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} (\text{A} - \text{B})^2;$$

$$\text{coſ. (A + B)} = 2 \text{ coſ. } \tfrac{1}{2} (\text{A} + \text{B})^2 - 1,$$

erit

$$\text{coſ. } \tfrac{1}{2} a^2 = \frac{\text{coſ. } \tfrac{1}{2} \text{E}^2 - \text{ſin. } \tfrac{1}{2} (\text{A} - \text{B})^2}{\text{ſin. A ſin. B}};$$

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} a^2 = - \frac{\text{coſ. } \tfrac{1}{2} \text{E}^2 - \text{coſ. } \tfrac{1}{2} (\text{A} + \text{B})^2 + 1}{\text{ſin. A ſin. B}}.$$

At ſupra artic. 29 demonſtrauimus eſſe

$$\text{Q} (\text{coſ. } \tfrac{1}{2} \text{E}^2 - \text{ſin. } \tfrac{1}{2} (\text{A} + \text{B})^2)$$

$$= 4 \text{coſ.} \tfrac{1}{2} \text{A coſ.} \tfrac{1}{2} \text{B} \begin{Bmatrix} \text{coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A+B+C+D}) \text{ coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A+B-C-D}) \\ \text{coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A+B+C-D}) \text{ coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A+B-C+D}) \end{Bmatrix} \text{ et}$$

$$\text{Q} (\text{coſ. } \tfrac{1}{2} \text{E}^2 - \text{ſin. } \tfrac{1}{2} (\text{A} - \text{B})^2)$$

$$= 4 \text{ coſ.} \tfrac{1}{2} \text{A coſ.} \tfrac{1}{2} \text{B} \begin{Bmatrix} \text{coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A-B+C+D}) \text{ coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{B+C+D-A}) \\ \text{coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A-B+C-D}) \text{ coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A-B-C+D}) \end{Bmatrix}.$$

Hincque patet eſſe

$$(\text{coſ.} \tfrac{1}{2} \text{A coſ.} \tfrac{1}{2} \text{B} + \text{coſ.} \tfrac{1}{2} \text{C coſ.} \tfrac{1}{2} \text{D}) \text{ ſin.} \tfrac{1}{2} \text{A ſin.} \tfrac{1}{2} \text{B coſ.} \tfrac{1}{2} a^2$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A - B + C + D}) \text{ coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{B + C + D - A}) \\ \text{coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A - B + C - D}) \text{ coſ.} \tfrac{1}{4} (\text{A - B - C + D}) \end{Bmatrix} \text{ et}$$

$$(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a^2$$
$$=-\left\{\begin{matrix}\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\end{matrix}\right\}\text{ et}$$
$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a^2=-\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)}{\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\,\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)}$$

§. 42. Deinde quum ſimili ratione poſito arcu $DC=c$, demonſtretur eſſe:

$$(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c^2$$
$$=\left\{\begin{matrix}\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\end{matrix}\right\}$$
$$(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c^2$$
$$=-\left\{\begin{matrix}\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{matrix}\right\},\text{ fiet}$$
$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+c)=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c=$$
$$\frac{\mu}{\nu}\left\{\begin{matrix}+\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ +\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)+\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{matrix}\right\}\text{ et}$$
$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+c)=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}a\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}c-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}c=$$
$$\frac{\mu'}{\nu'}\left\{\begin{matrix}+\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\\ +\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\end{matrix}\right\};$$

exiſtente

$$\mu=\sqrt{-\left\{\begin{matrix}\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)\end{matrix}\right\}};$$
$$\mu'=\sqrt{\left\{\begin{matrix}\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{matrix}\right\}};$$
$$\nu=\sqrt{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D\,(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D)}.$$

Atqui ob

2 coſ.

$$2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(C-D);$$
$$2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-B)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(C+D);$$

tumque

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-B)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)=2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(C-D)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(C+D)=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D,$$

fit omnino

$$\left\{\begin{matrix}\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\\ \text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)\end{matrix}\right\}$$
$$=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{cſ.}\tfrac{1}{2}D.$$

Simili ratione

$$2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-B)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(C-D)$$
$$2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+B)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(C+D)$$

vnde haec productorum ſumma denuo

$$=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}A\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D,$$

hinc ergo colligitur:

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+c)=\sqrt{\frac{-\text{c.}\tfrac{1}{4}(A+B+C+D)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(A+B-C-D)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(A-B+C-D)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(A-B-C+D)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D}}$$

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(a+c)=\sqrt{\frac{\text{cſ.}\tfrac{1}{4}(A+B+C-D)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(A+B-C+D)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(A-B+C+D)\,\text{c.}\tfrac{1}{4}(B+C+D-A)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D}}$$

et denique

$$\text{ſin.}(a+c)=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c+d)=\frac{2\sqrt{\mu\,\mu'}}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}A\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D}.$$

Caeterum relationes conſimiles iis, quas artic. 34 recenſuimus hinc quoque deduci poſſent, quibus tamen recenſendis non eſt vt immoremur.

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS ANALYTICI NON PARVM CVRIOSI.

Auctore
NICOLAO FVSS.

§. 1.

Problema, cuius Solutionem hic breuiter exponere animus eſt, ſpectat transformationem expreſſionis cuiusdam irrationalis, ad quam me Quaeſtio quaedam perduxerat, de qua alia occaſione ſermonem facere mecum conſtitui; poſtulabat ea, vt haec expreſſio:

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1+4t)}} \left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1}$$

in ſeriem euolueretur ſecundum poteſtates ipſius t procedentem, quod negotium, poſtquam variis modis fruſtra tentaſſem, tandem ſequenti modo ex voto ſucceſſit.

§. 2.

§. 2 Cum ſit

$$s\sqrt{(1+4t)} = \left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1}$$

poſui

$$\left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1} = s\sqrt{(1+4t)} = z,$$

ita vt

$$lz = (n+1)(l(1+\sqrt{1+4t}) - l\,2),$$

ideoque

$$\frac{dz}{z} = \frac{2(n+1)\,dt}{\sqrt{1+4t}\,(1+\sqrt{1+4t})} = \frac{(n+1)(\sqrt{1+4t}-1)\,dt}{2t\sqrt{(1+4t)}},$$

quam aequationem hoc modo repraeſentaui:

$$\frac{dz}{z} - \frac{(n+1)\,dt}{2t} = -\frac{(n+1)\,dt}{2t\sqrt{(1+4t)}}.$$

Nunc poſui

$$\frac{dz}{z} - \frac{n+1}{2}\,\frac{dt}{t} = \frac{dv}{v},\text{ ita vt}$$

$$lz - \tfrac{1}{2}(n+1)\,lt = lv,$$

ideoque

$$v = \frac{z}{t^{\frac{1}{2}(n+1)}},\text{ ſiue}$$

$$z = v\,t^{\frac{1}{2}(n+1)},\text{ ergo}$$

$$s = \frac{z}{\sqrt{(1+4t)}} = \frac{v\,t^{\frac{1}{2}(n+1)}}{\sqrt{(1+4t)}}.$$

Tum autem habebam $\frac{dv}{v} = -\frac{(n+1)\,dt}{2t\sqrt{(1+4t)}}$, ſiue ſumtis vtrinque quadratis $\frac{dv^2}{vv} = \frac{(n+1)^2\,dt^2}{4tt(1+4t)}$, ita vt nunc tractanda ſit haec aequatio:

$$4tt(1+4t)\,dv^2 = (n+1)^2\,vv\,dt^2.$$

§. 3. Hanc iam aequationem differentialem denuo differentiemus, ſumto elemento dt conſtante, et prodibit ſequens aequatio:

$$4tt(1+4t)ddv+(4t+24tt)dtdv=(n+1)^2 v dt^2,$$

quae diuiſa per $4v$ abit in hanc:

$$tt(1+4t)\frac{ddv}{v}+(t+6tt)dt.\frac{dv}{v}=\frac{(n+1)^2}{4}dt^2.$$

§. 4. Iam vero eſt

$$v=\frac{z}{t^{\frac{1}{2}(n+1)}}=\frac{s\sqrt{(1+4t)}}{t^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

ideoque

$$lv=ls+\tfrac{1}{2}l(1+4t)-\tfrac{1}{2}(n+1)lt,$$

conſequenter

$$\frac{dv}{v}=\frac{ds}{s}+\frac{2dt}{1+4t}-\tfrac{1}{2}(n+1)\frac{dt}{t},$$

et denuo differentiando

$$\frac{ddv}{v}-\frac{dv^2}{vv}=\frac{dds}{s}-\frac{ds^2}{ss}-\frac{8dt^2}{(1+4t)^2}+\tfrac{1}{2}(n+1)\frac{dt^2}{tt},$$

cui aequationi ſi addatur haec:

$$\frac{dv^2}{vv}=\frac{ds^2}{ss}+\frac{4dtds}{s(1+4t)}-\frac{(n+1)dtds}{ts}+\frac{4dt^2}{(1+4t)^2}$$
$$-\frac{2(n+1)dt^2}{t(1+4t)}+\tfrac{1}{4}(n+1)^2.\frac{dt^2}{tt},$$

prodibit

$$\frac{ddv}{v}=\frac{dds}{s}+\frac{4dtds}{s(1+4t)}-\frac{(n+1)dtds}{ts}-\frac{4dt^2}{(1+4t)^2}$$
$$+\frac{(n+1)(n+3)dt^2}{4tt}-\frac{2(n+1)dt^2}{t(1+4t)}.$$

Subſtituantur iam loco $\frac{ddv}{v}$ et $\frac{dv}{v}$ valores modo inuenti in aequatione noſtra, fietque ſi omnia membra rite contrahantur:

tt

$$t\,t(1+4t)\frac{dds}{s}-[(4n-6)tt+nt]\,dt.\frac{ds}{s}\left.\begin{matrix}\\+[(nn-n)t-\tfrac{1}{4}(n+1)^2]\,dt^2\end{matrix}\right\}=\frac{(n+1)^2}{4}.dt^2$$

quae aequatio ducta in $\frac{s}{tdt^2}$ et in ordinem redacta hanc formam induit:

$$t(1+4t)\frac{dds}{dt^2}-[(4n-6)t+n]\frac{ds}{dt}+(nn-n)s=0,$$

quae iam forma ad transformationem nobis propoſitam ſatis eſt idonea.

§. 5. Iam fingatur pro s haec ſeries:

$$s=1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\delta t^4+\text{etc.},$$

eritque

$$\frac{ds}{dt}=\alpha+2\beta t+3\gamma t^2+4\delta t^3+\text{etc., et}$$
$$\frac{dds}{dt^2}=2\beta+6\gamma t+12\delta t^2+20\varepsilon t^3+\text{etc.}$$

vnde pro aequatione noſtra fiet:

$$\begin{aligned}
t\frac{dds}{dt^2}&= 2\beta t+6\gamma t^2+12\delta t^3+20\varepsilon t^4+\text{etc.}\\
4tt\frac{dds}{dt^2}&= +8\beta t^2+24\gamma t^3+48\delta t^4+\text{etc.}\\
-4nt\frac{ds}{dt}&= -4\alpha nt-8\beta nt^2-12\gamma nt^3-16\delta nt^4-\text{etc.}\\
+6t\frac{ds}{dt}&= +6\alpha t+12\beta t^2+18\gamma t^3+24\delta t^4-\text{etc.}\\
-n\frac{ds}{dt}&=-n\alpha-2n\beta t-3n\gamma t^2-4n\delta t^3-5n\varepsilon t^4-\text{etc.}\\
+nns&=+nn+\alpha nnt+\beta nnt^2+\gamma nnt^3+\delta nnt^4+\text{etc.}\\
-ns&=-n-\alpha nt-\beta nt^2-\gamma nt^3-\delta nt^4-\text{etc.}
\end{aligned}$$

§. 6. Cum igitur aequatio noſtra nihilo aequetur, neceſſe eſt vt ſummae ſingulorum membrorum ſeorſim nihilo aequales efficiantur, vnde deducuntur ſequentes determinationes:

$$nn - n\alpha - n = 0$$
$$nn\alpha - 5n\alpha - 2n\beta + 6\alpha + 2\beta = 0$$
$$nn\beta - 9n\beta - 3n\gamma + 20\beta + 6\gamma = 0$$
$$nn\gamma - 13n\gamma - 4n\delta + 42\gamma + 12\delta = 0$$
$$nn\delta - 17n\delta - 5n\varepsilon + 72\delta + 20\varepsilon = 0$$
$$nn\varepsilon - 21n\varepsilon - 6n\zeta + 110\varepsilon + 30\zeta = 0$$
etc.

ex quibus aequationibus ſequentes deducuntur valores coëfficientium α, β, γ, etc.

$\alpha = \frac{nn - n}{n}$, ſiue $\alpha = \frac{n-1}{1}$,

$\beta = \frac{(nn - 5n + 6)\alpha}{2(n-1)}$, ſiue $\beta = \frac{(n-2)(n-3)}{2(n-1)}\alpha$,

$\gamma = \frac{(nn - 9n + 20)\beta}{3(n-2)}$, ſiue $\gamma = \frac{(n-4)(n-5)}{3(n-2)}\beta$,

$\delta = \frac{(nn - 13n + 42)\gamma}{4(n-3)}$, ſiue $\delta = \frac{(n-6)(n-7)}{4(n-3)}\gamma$,

$\varepsilon = \frac{(nn - 17n + 72)\delta}{5(n-4)}$, ſiue $\varepsilon = \frac{(n-8)(n-9)}{5(n-4)}\delta$,

etc. etc.

§. 7. Quilibet igitur horum coëfficientium ex antecedente facillime determinatur; vnde ſi ſucceſſiue ſubſtituantur, prodibit

$$\alpha = \frac{n-1}{1}$$
$$\beta = \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}$$
$$\gamma = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$\delta = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$\varepsilon = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$
etc.

quos

quos igitur valores, ſi in vſum vocemus modum ſignandi ab Illuſtri quondam *EVLERO* pro vnciis poteſtatum binomii receptum, hoc modo concinne exprimere licet:

$$\alpha = [\tfrac{n-1}{1}];\ \beta = [\tfrac{n-2}{2}];\ \gamma = [\tfrac{n-3}{3}];\ \delta = [\tfrac{n-4}{4}];\ \text{etc.}$$

quibus inuentis formula noſtra propoſita

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1+4t)}} \left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1}$$

ſequenti modo per ſeriem infinitam exprimetur:

$$s = 1 + [\tfrac{n-1}{1}]\,t + [\tfrac{n-2}{2}]\,t^2 + [\tfrac{n-3}{3}]\,t^3 + [\tfrac{n-4}{4}]\,t^4 + \text{etc.}$$

§. 7. Quod ſi igitur propoſita fuerit haec aequatio differentialis ſecundi gradus:

$$t(1+4t)\frac{dds}{dt^2} - [(4n-6)\,t + n]\frac{ds}{dt} + n(n-1)\,s = 0,$$

eius integrale duplici modo aſſignari poterit; finite ſcilicet erit

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1+4t)}} \left(\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}\right)^{n+1};$$

tum vero per ſeriem infinitam integrale etiam hoc modo exprimitur:

$$s = 1 + [\tfrac{n-1}{1}]\,t + [\tfrac{n-2}{2}]\,t^2 + [\tfrac{n-3}{3}]\,t^3 + [\tfrac{n-4}{4}]\,t^4 + \text{etc.}$$

§. 9. Si ponatur $\frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2} = x$, cum hinc fiat $\sqrt{(1+4t)} = 2x - 1$, erit $s = \frac{x^{n+1}}{2x-1}$; at ſeries noſtra, ob $t = xx - x$, transformatur in hanc:

$$s = \frac{x^{n+1}}{2x-1} = 1 + [\tfrac{n-1}{1}](xx-x) + [\tfrac{n-2}{2}](xx-x)^2$$
$$+ [\tfrac{n-3}{3}](xx-x)^3 + [\tfrac{n-4}{4}](xx-x)^4 + \text{etc.}$$

Sin autem in aequatione differentio-differentiali ſtatuatur $t = xx - x$, elementum dt non amplius conſtans aſſumere licet. Hac igitur conditione omiſſa loco $\frac{dds}{dt^2}$ ſcribi debet $\frac{1}{dt} \cdot d \cdot \frac{ds}{dt}$. Cum igitur ſit $t = xx - x$, ſumto dx conſtanti erit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{(2x-1)dx}$$
$$d \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dds}{(2x-1)dx} - \frac{2ds}{(2x-1)^2} \text{ et}$$
$$\frac{dds}{dt^2} = \frac{1}{dt} \cdot d \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dds}{(2x-1)^2 dx^2} - \frac{2ds}{(2x-1)^3 dx},$$

quibus ſubſtitutis aequatio illa fit

$$x(x-1)\frac{dds}{dx^2} - \left(\frac{4(n-1)(xx-x)+n}{2x-1}\right)\frac{ds}{dx} + n(n-1)s = 0$$

cui igitur ſatisfacere debet iſte valor: $s = \frac{x^{n+1}}{2x-1}$, quod reuera euenire ita oſtenditur.

§. 10. Cum ſit $s = \frac{x^{n+1}}{2x-1}$, habebimus

$$\frac{ds}{dx} = \frac{(n+1)x^n}{2x-1} - \frac{2x^{n+1}}{(2x-1)^2};$$
$$\frac{dds}{dx^2} = \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2x-1} - \frac{4(n+1)x^n}{(2x-1)^2} + \frac{8x^{n+1}}{(2x-1)^3},$$

quibus in illa aequatione ſubſtitutis prodibit iſta aequalitas:

$+ n$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{n(n+1)x^{n+1}}{2x-1}-\frac{4(n+1)x^{n+2}}{(2x-1)^2}+\frac{8x^{n+1}}{(2x-1)^3}-\frac{n(n+1)x^n}{2x-1}\\
+\frac{4(n+1)x^{n+1}}{(2x-1)^2}-\frac{8x^{n+2}}{(2x-1)^3}+\frac{8(n-1)x^{n+3}}{(2x-1)^3}-\frac{n(n+1)x^n}{(2x-1)^2}\\
+\frac{4(nn-1)x^{n+1}}{(2x-1)^2}-\frac{4(nn-1)x^{n+2}}{(2x-1)^2}\\
+\frac{2nx^{n+1}}{(2x-1)^3}-\frac{8(n-1)x^{n+2}}{(2x-1)^3}\\
+\frac{n(n-1)x^{n+1}}{2x-1}
\end{array}\right\}=0.$$

Quod ſi iam hanc aequationem diuidamus per x^n et multiplicemus per $(2x-1)^3$, terminis ſecundum poteſtates ipſius x ordinatis erit

$$\left.\begin{array}{l}
8nx^3-xx\,[4n(n+1)(2x-1)+8n]\\
-x\,[2nn(2x-1)^2+4n(n+1)(2x-1)+2n]\\
-2n(n+1)(2x-1)x
\end{array}\right\}=0,$$

et ſi omnia euoluantur prodibit:

$$\left.\begin{array}{r}
8nx^3-8nnx^3+4nnxx+4nxx+2nnx-2nx\\
-8nx^3+8nnx^3-8nnxx-8nxx-2nnx+2nx\\
+4nnxx+4nnx
\end{array}\right\}=0,$$

quae aequatio cum ſit identica, manifeſto declarat valorem $s=\frac{x^{n+1}}{2x-1}$ reuera ſatisfacere aequationi noſtrae differentio-differentiali

$$x(x-1)\frac{dds}{dx^2}-\left(\frac{4(n-1)(xx-x)+n}{2x-1}\right)\frac{ds}{dx}+n(n-1)s=0,$$

quemadmodum ſupra §. 9. inuenimus.

§. 11.

§. 11. Aequationis noſtrae differentio-differentialis membrum ſecundum, quod eſt

$$-\left(\frac{4(n-1)(xx-x)+n}{2x-1}\right)\frac{ds}{dx},$$

diſcerpatur in has partes:

$$-\frac{n}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}-\frac{4n(xx-x)}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}+\frac{4(xx-x)}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}$$

ſiue in iſtas:

$$-\frac{n}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx}(1+4xx-4x)+\frac{4(xx-x)}{2x-1}\cdot\frac{ds}{dx},$$

quo facto aequatio in hanc formam mutabitur:

$$\left.\begin{array}{r}(xx-x)\,dds-n(2x-1)\,dx\,ds+\frac{4(xx-x)\,dx\,ds}{2x-1}\\ +n(n-1)\,s\,dx^2\end{array}\right\}=0,$$

cuius integrale particulare vidimus eſſe $s=\frac{x^{n+1}}{2x-1}$, eius vero integrale completum eſt

$$s=\frac{A\,x^{n+1}+B(1-x)^{n+1}}{2x-1},$$

quod ita oſtenditur.

§. 12. Statuatur $s=\frac{y}{2x-1}$, eritque

$$ds=\frac{dy}{2x-1}-\frac{2y\,dx}{(2x-1)^2}\text{ et}$$

$$dds=\frac{ddy}{2x-1}-\frac{4dx\,dy}{(2x-1)^2}+\frac{8y\,dx^2}{(2x-1)^3},$$

quibus in aequatione illa ſubſtitutis fiet

$$\left.\begin{array}{r}\frac{(xx-x)}{2x-1}ddy-\frac{4(xx-x)}{(2x-1)^2}dx\,dy+\frac{8(xx-x)}{(2x-1)^3}y\,dx^2\\ -n\,dx\,dy\qquad+\frac{2n\,y\,dx^2}{2x-1}\\ +\frac{4(xx-x)\,dx\,dy}{(2x-1)^2}-\frac{8(xx-x)}{(2x-1)^2}y\,dx^2\\ +\frac{n(n-1)\,y\,dx^2}{2x-1}\end{array}\right\}=0,$$

quae

quae aequatio contrahitur in hanc:

$$\frac{(xx-x)}{2x-1}ddy - ndxdy + \frac{n(n+1)}{2x-1}ydx^2 = 0,$$

ſiue multiplicando per $2x-1$ erit

$$xxddy - xddy - 2nxdxdy + ndxdy + n(n+1)ydx^2 = 0.$$

§. 13. Quod ſi iam iſta aequatio diuidatur per x^{n+1}, ea ſponte fit integrabilis; prodit enim

$$\frac{ddy}{x^{n-1}} - \frac{ddy}{x^n} - \frac{2ndxdy}{x^n} + \frac{ndxdy}{x^{n+1}} + \frac{n(n+1)ydx^2}{x^{n+1}} = 0,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dy}{x^{n-1}} - \frac{(n+1)ydx}{x^n} - \frac{dy}{x^n} = \alpha, \text{ ſiue}$$

$$\frac{dy(x-1)}{x^n} - \frac{(n+1)ydx}{x^n} = \alpha,$$

vel etiam

$$dy - \frac{(n+1)ydx}{x-1} = \frac{\alpha x^n dx}{x-1},$$

quae aequatio ducta in $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$ integrabilis redditur. Erit enim

$$y = \alpha(1-x)^{n+1}\int\frac{x^n dx}{(1-x)^{n+2}}.$$

At vero

$$\alpha\int\frac{x^n dx}{(1-x)^{n+2}} = \frac{A x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} + B,$$

vnde deducitur

$$y = A x^{n+1} + B(1-x)^{n+1} = s(2x-1),$$

ergo

$$s = \frac{A x^{n+1} + B(1-x)^{n+1}}{2x-1}.$$

Ex hoc integrali completo autem integrale illud particulare elicitur ſumendo $A = 1$ et $B = 0$.

§. 14. Reuertamur ad aequationem infinitam ſupra inuentam pro valore

$$s = \frac{x^{n+1}}{2x-1} = 1 + [\tfrac{n-1}{1}](xx-x) + [\tfrac{n-2}{2}](xx-x)^2$$
$$+ [\tfrac{n-3}{3}](xx-x)^3 + [\tfrac{n-4}{4}](xx-x)^4 + \text{etc.}$$

vbi, ſi ſumatur $x = 0$, ingens ſe manifeſtat Paradoxon, cum hoc caſu fiat $0 = 1$. Quin etiam, ſi x non euaneſcens, ſed tantum infinite paruum ſtatuatur, idem incommodum locum habet, cum fiat $\frac{\omega^{n+1}}{2\omega - 1} = \frac{1}{2}\omega^n = 1$, ita vt poteſtas minimi ω quantitati finitae aequetur, quod certe abſurdum eſt. Hoc autem Paradoxon penitus diluetur, ſi conſideretur eſſe $x = \frac{1+\sqrt{(1+4t)}}{2}$, ideoque nullum dari valorem pro t, qui reddat quantitatem x euaneſcentem: minimus enim valor, qui pro t aſſumi poteſt, eſt $t = -\frac{1}{4}$, quo caſu fit $x = \frac{1}{2}$. Poſito autem $t = -\frac{1}{4}$, ſiue $x = \frac{1}{2}$ et $n = 0$, prodit haec ſummatio:

$$\infty = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2.3}{1.2}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{3.4.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{4.5.6.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Quicquid autem ſit n ſemper erit

$$1 - [\tfrac{n-1}{1}]\tfrac{1}{4} + [\tfrac{n-2}{2}]\cdot\tfrac{1}{4^2} - [\tfrac{n-3}{3}]\cdot\tfrac{1}{4^3} + [\tfrac{n-4}{4}]\cdot\tfrac{1}{4^4} - \text{etc.} = \infty,$$

quod nihil abſurdi in ſe complectitur.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE DESCENSV BACVLI SVPER HYPOMOCHLIO CYLINDRICO FIXO DELABENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Referat tabula planum verticale, in quo detur circulus $C c A$, ſectionem circuli horizontalis fixi exhibens, ſuper quo baculus $F f G g$ incumbens delabatur, qui elapſo tempore t ſitum teneat in figura repraeſentatum, vbi circulum tangat in puncto A, ita vt, ducta per centrum circuli C recta verticali $c C P$, baculus ab ea declinet angulo $c C A = \Phi$, ac ponatur radius huius circuli ſeu cylindri $C A = a$. Tum vero reperiatur baculi centrum grauitatis in M, vnde intra baculum ſecundum longitudinem ducatur recta M B, ita vt interuallum A B referat ſemicraſſitiem baculi, quae vocetur $A B = b$, at breuitatis gratia ponatur diſtantia $C B = a + b = c$. Praeterea vero vocetur diſtantia $M B = s$, ex Tab. I. Fig. 10.

 qua

qua intelligitur, quovsque baculus labendo iam peruenerit; quandoquidem manifeſtum eſt, ſi tam angulus $cCA = \Phi$ quam iſtud interuallum $MB = s$ euanescerent, tum baculum in puncto c cylindro incumbere et in aequilibrio fore conſtitutum. Quibus poſitis quaeſtio huc redit, vt ad datum quoduis tempus t tam angulus Φ quam interuallum s asſignari poſſit.

§. 2. Longitudinem baculi hic non in computum duco, quoniam per ſe euidens eſt, cum eius ſuperior terminus F cylindrum fuerit praetergreſſus, tum motum, cuius inueſtigatio hic nobis eſt propoſita, eſſe ceſſaturum, et baculum per ſolam grauitatem deorſum delapſurum. At vero in calculum potiſſimum ingreditur maſſa ſeu pondus totius baculi, quod littera M deſignetur, quo ergo centrum grauitatis M verticaliter deorſum nitetur. Praeter hanc vero vim baculus quoque ſuſtinet preſſionem, qua in puncto A ad cylindrum apprimitur, et qua cylindrus in baculum ſecundum directionem A B reagit, quae, quia non aliter niſi toto calculo abſoluto determinari poteſt, tantisper littera Π indicetur, ita vt iam baculus a duabus viribus ſollicitari ſit cenſendus: altera ſcilicet, qua centrum grauitatis M deorſum vrgetur, quam poſuimus $= M$; altera vero, qua in puncto A ſecundum directionem A B ad baculum normalem repellitur, quamque poſuimus $= \Pi$. Inſuper autem, niſi tam cylindrus quam baculus habeat ſuperficiem perfectiſſime politam in A, vbi baculus ſuper cylindro prorepit, dabitur frictio certae parti preſſionis Π aequalis, quae ſtatuatur $= \lambda \Pi$, cuius directio erit recta A F. Denique ad motum gyratorium, quo baculus ciebitur, definiendum, ſit eius momen-

mentum inertiae reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis M tranſeuntis $= M\,k\,k$.

§. 3. Quo autem motus, quem iſtae vires in baculo generabunt, per principia mechanica determinari poſſit, eum ad binas directiones fixas reuocari oportet; quem in finem ad rectam verticalem $c\,C\,P$ ex M normaliter ducatur recta horizontalis M P, ita vt ſitus puncti M determinetur per has duas coordinatas: $CP = x$ et $PM = y$, quibus ſcilicet opus eſt ad motum progreſſiuum centri grauitatis M inueſtigandum. Pro motu autem gyratorio perſpicuum eſt, praeſentem baculi inclinationem ad horizontem aequalem eſſe ipſi angulo $c\,C\,A = \Phi$, qui, vti facile intelligitur, a viribus ſollicitantibus continuo augetur.

§. 4. Hic autem primo videndum eſt, quomodo binae coordinatae x et y per binas variabiles ſtabilitas Φ et s determinentur. Vbi quidem facile patet, fore

$$CP = x = s\,\text{ſin.}\,\Phi - c\,\text{coſ.}\,\Phi \text{ et}$$
$$PM = y = s\,\text{coſ.}\,\Phi + c\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

Deinde autem ad has duas directiones etiam vires ſollicitantes reduci conuenit. Ac primo quidem vis grauitatis iam ſecundum ipſam directionem C P agit: at vis $AB = \Pi$ per reſolutionem praebet vim ſurſum tendentem $\Pi\,\text{coſ.}\,\Phi$, et vim ſecundum P M agentem $= \Pi\,\text{ſin.}\,\Phi$; tertia vero vis frictionis $\lambda\,\Pi$ etiam vim praebet ſurſum vrgentem $= \lambda\,\Pi\,\text{ſin.}\,\Phi$ et vim horizontalem retro ſecundum M P agentem $= \lambda\,\Pi\,\text{coſ.}\,\Phi$, ſicque pro motu progreſſiuo centri grauitatis determinando ſecundum directionem verticalem C P habebimus totam vim $= M - \Pi\,\text{coſ.}\,\Phi - \lambda\,\Pi\,\text{ſin.}\,\Phi$ et ſecundum directionem $PM = \Pi\,\text{ſin.}\,\Phi - \lambda\,\Pi\,\text{coſ.}\,\Phi$. Iam vero

vero ex his viribus deducuntur ſequentes binae aequationes differentio-differentiales:

$$\text{I. } \frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} = M - \Pi \text{ coſ. } \Phi - \lambda \Pi \text{ ſin. } \Phi;$$

$$\text{II. } \frac{M\,ddy}{2g\,dt^2} = \Pi \text{ ſin. } \Phi - \lambda \Pi \text{ coſ. } \Phi;$$

vbi elementum temporis dt ſumtum eſt conſtans, et litera g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur, ſiquidem tempora in minutis ſecundis exprimere velimus.

§. 5. Deinde vero pro motu gyratorio determinando colligi debent momenta virium ſollicitantium reſpectu centri grauitatis M, vbi quidem ex pondere M nullum momentum oritur. Ex preſſione autem Π ſecundum directionem M B agente momentum naſcitur $= \Pi \cdot MB = \Pi s$, quo inclinatio ad horizontem augebitur. Ex frictione vero $\lambda \Pi$ ſecundum directionem A F vrgente naſcetur momentum $\lambda \Pi \cdot Mm = \lambda \Pi b$, quo adhuc inclinatio augeri eſt cenſenda. Atque hinc ſecundum principia motus, habebitur ſequens aequatio differentialis ſecundi gradus:

$$\text{III. } \frac{Mkk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \Pi s + \lambda \Pi b.$$

§. 6. Ante omnia igitur ex duabus prioribus aequationibus elidi oportet binas coordinatas x et y; quare cum poſuerimus

$$x = s \text{ ſin. } \Phi - c \text{ coſ. } \Phi, \text{ erit}$$

$$dx = ds \text{ ſin. } \Phi + s\,d\Phi \text{ coſ. } \Phi + c\,d\Phi \text{ ſin. } \Phi \text{ et}$$

$$ddx = dds \text{ ſin. } \Phi + 2\,ds\,d\Phi \text{ coſ. } \Phi + s\,dd\Phi \text{ coſ. } \Phi$$
$$- s\,d\Phi^2 \text{ ſin. } \Phi + c\,dd\Phi \text{ ſin. } \Phi + c\,d\Phi^2 \text{ coſ. } \Phi.$$

Simili

Simili modo cum ſit

$$y = s\,\text{coſ.}\,\Phi + c\,\text{ſin.}\,\Phi,$$ erit

$$dy = ds\,\text{coſ.}\,\Phi - s\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + c\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$ et

$$ddy = dds\,\text{coſ.}\,\Phi - 2\,ds\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - s\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$$
$$- s\,d\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi + c\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - c\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

Quia autem hae formulae nimis ſunt complicatae, quam vt in aequationes noſtras priores eas induci conſultum eſſet, per certas combinationes hinc concinniores formulas deriuemus; ac primo quidem erit

$$ddx\,\text{ſin.}\,\Phi + ddy\,\text{coſ.}\,\Phi = dds - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi,$$

ſimilique modo altera combinatio dabit

$$ddx\,\text{coſ.}\,\Phi - ddy\,\text{ſin.}\,\Phi = 2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2.$$

§. 7. Pari vero modo binae aequationes priores inter ſe combinentur, ac prior combinatio dabit

$$\frac{M(ddx\,\text{ſin.}\,\Phi + ddy\,\text{coſ.}\,\Phi)}{2g\,dt^2} = M\,\text{ſin.}\,\Phi - \lambda\Pi,$$

altera vero combinatio producet

$$M\,(ddx\,\text{coſ.}\,\Phi - ddy\,\text{ſin.}\,\Phi) = M\,\text{coſ.}\,\Phi - \Pi.$$

Quodſi ergo in his aequationibus valores ante inuentos ſubſtituamus, binae aequationes priores in formas abibunt ſequentes:

$$\text{I.}\quad \frac{M\,dds - Ms\,d\Phi^2 + Mc\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = M\,\text{ſin.}\,\Phi - \lambda\Pi;$$

$$\text{II.}\quad \frac{2M\,ds\,d\Phi + Ms\,dd\Phi + Mc\,d\Phi^2}{2g\,dt^2} = M\,\text{coſ.}\,\Phi - \Pi;$$

quibus adiungi opportet tertiam iam ante inuentam

$$\text{III.}\quad \frac{Mkk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \Pi s + \lambda\Pi b.$$

§. 8. Tres igitur adepti ſumus aequationes, ex quibus etiam tres incognitas, ſcilicet s, Φ et Π definiri oportet. Ac primo quidem preſſio Π commodiſſime ex tertia aequatione ita determinatur, vt ſit $\Pi = \frac{Mkkdd\Phi}{2g\,dt^2(s+\lambda b)}$, qui valor ſi in prioribus aequationibus ſubſtituatur, per M diuidi poterit et ambae aequationes ſequentes induent formas, poſtquam per $2g\,dt^2$ multiplicauerimus:

$$\text{I. } dds - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi = 2g\,dt^2 \text{ſin.}\,\Phi - \frac{\lambda kk\,dd\Phi}{s+\lambda b};$$

$$\text{II. } 2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2 = 2g\,dt^2 \text{coſ.}\,\Phi - \frac{kk\,dd\Phi}{s+\lambda b};$$

ſicque totum negotium huc eſt reductum, vt ex his duabus aequationibus binae noſtrae incognitae s et Φ eliciantur.

§. 9. Hic ſtatim apparet elementum temporis dt commode ex calculo extrudi poſſe. Prior enim aequatio per coſ. Φ et poſterior per $-$ ſin. Φ multiplicata iunctim praebent

$$dds\,\text{coſ.}\,\Phi - s\,d\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi + c\,dd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - 2\,ds\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$$
$$- s\,dd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - c\,d\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{kk\,dd\Phi}{s+\lambda b}(\text{ſin.}\,\Phi - \lambda\,\text{coſ.}\,\Phi)$$

Verum etiamſi hinc tempus t eliminatum videtur: tamen adhuc eius ratio reuera ineſt, quia eius elementum dt conſtans eſt aſſumtum; quandoquidem ex hac demum conditione differentialia ſecunda dds et $dd\Phi$ valores determinatos adipiſcuntur; et hanc ob rem haec aequatio nullum nobis vſum praeſtari prorſus poterit.

§. 10. Cum igitur reſolutio binarum aequationum inuentarum ſine dubio maxime abſtruſa ſit cenſenda, plurimum intererit ſtatum quaeſtionis ad maiorem ſimplicitatem reduci. Statuamus ergo ambas conſtantes b et c nihilo aequales; tum vero etiam a frictione mentem abſtra-

ſtrahamus, ita vt ſit $\lambda = 0$; atque hoc caſu binae aequationes reſoluendae erunt

$$\text{I. } dds - s\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2 \,\text{ſin.}\, \Phi;$$

$$\text{II. } 2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2 \,\text{coſ.}\, \Phi - \frac{kk\,dd\Phi}{s}.$$

§. 11. Attendenti autem mox patebit, ſi harum aequationum prior per $2\,ds$, poſterior vero per $2\,s\,d\Phi$ multiplicetur, ſummam earum, quae erit

$$2\,ds\,dds + 2\,s\,ds\,d\Phi^2 + 2\,ss\,d\Phi\,dd\Phi$$
$$= 4\,g\,dt^2 (ds \,\text{ſin.}\, \Phi + s\,d\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi) - 2\,kk\,d\Phi\,dd\Phi$$

fore integrabilem, quippe integrale erit

$$ds^2 + ss\,d\Phi^2 = 4\,g\,s\,dt^2 \,\text{ſin.}\, \Phi - kk\,d\Phi^2, \text{ ſiue}$$
$$ds^2 + (ss + kk)\,d\Phi^2 = 4\,g\,dt^2 (s \,\text{ſin.}\, \Phi + C)$$

in qua aequatione principium conſeruationis virium viuarum continetur.

§. 12. Huic aequationi addatur prima in s ducta et ſumma erit

$$d.\,s\,ds + kk\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2 (3\,s \,\text{ſin.}\, \Phi + 2\,C),$$

quae ducatur in $2\,s\,ds$, vt prodeat haec forma:

$$d.\,ss\,ds^2 + 2\,kk\,s\,ds\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2 (6\,s \,\text{ſin.}\, \Phi + 4\,C)\,s\,ds.$$

At vero ſecunda aequatio ducta in s praebet

$$d.\,ss\,d\Phi + kk\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2\,s \,\text{coſ.}\, \Phi,$$

haec porro ducatur in $2\,ss\,d\Phi$, vt prodeat

$$d.\,s^4\,d\Phi^2 + 2\,kk\,ss\,d\Phi\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2 . 2\,s^3\,d\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi,$$

quae aequatio ad praecedentem adiecta praebet

$$d.ssds^2 + d.s^4 d\Phi^2 + kk\,d.ssd\Phi^2$$
$$= 2gdt^2(2s^3 d\Phi \operatorname{coſ}.\Phi + 6ssds \operatorname{ſin}.\Phi + 4Csds)$$
$$= 2gdt^2(d.2s^3 \operatorname{ſin}.\Phi + d.2Css),$$

vnde manifeſto deducitur hoc integrale:

$$ssds^2 + s^4 d\Phi^2 + kkssd\Phi^2 = 4gdt^2(s^3 \operatorname{ſin}.\Phi + Css + D)$$

ſicque iam nacti ſumus duas aequationes differentiales primi gradus, in quas introductae ſunt duae conſtantes arbitrariae C et D.

§. 13. Quaeramus ex vtraque aequatione inuenta valorem $2gdt^2$, qui erit ex priore

$$4gdt^2 = \frac{ds^2 + (ss + kk)d\Phi^2}{s \operatorname{ſin}.\Phi + C};$$

ex poſteriore vero colligitur

$$4gdt^2 = \frac{ssds^2 + ss(ss + kk)d\Phi^2}{s^3 \operatorname{ſin}.\Phi + Css + D},$$

qui valores inter ſe aequati producent hanc aequationem:

$$ds^2(s^3 \operatorname{ſin}.\Phi + Css + D) + (ss + kk)d\Phi^2(s^3 \operatorname{ſin}.\Phi + Css + D)$$
$$= ssds^2(s \operatorname{ſin}.\Phi + C) + ss(ss + kk)d\Phi^2(s \operatorname{ſin}.\Phi + C).$$

Transferantur nunc termini ita, vt ex altera parte tantum ds, ex altera vero $d\Phi$ tantum reperiantur, eritque

$$D(ss + kk)d\Phi^2 = Dds^2$$

quae aequatio conſiſtere nequit niſi ſit $D = 0$, hocque caſu ambae aequationes a ſe inuicem non discrepant

§. 14. Talis autem aequatio integralis, principio virium viuarum innixa, nequidem generalius, admiſſa cylindri magnitudine et craſſitie baculi erui poteſt, ſi ſcilicet etiam frictionis ratio habeatur. Verum, quamuis etiam alia combinatione integratio ſuccederet: tamen hinc nihil plane

plane emolumenti redundaret ad problema propoſitum reſoluendum, quandoquidem ad ſolutionem perfectam ad minimum duplex integratio requireretur. Cum autem talem ſolutionem hactenus fruſtra tentaſſem, mihi quidem nulla alia via ſupereſſe videtur ad hunc motum cognoscendum, niſi vt ex ipſis aequationibus differentio-differentialibus ſolutionem per approximationes elicere conemur.

Determinatio motus quaeſiti ſine ſubſidio integrationis.

§. 15. Quoniam hoc Problema duabus aequationibus differentialibus ſecundi gradus continetur, eae quatuor conſtantes arbitrarias inuoluunt; vnde intelligimus, ad Problema penitus determinandum quatuor requiri conditiones ab arbitrio noſtro pendentes, id quod etiam ipſa quaeſtionis natura declarat. Cum enim ſtatus initialis tanquam cognitus ſpectari debeat, is vtique quatuor rebus determinari deprehenditur. Primo enim non ſolum interuallum $BM = s$ datum habuerit valorem neceſſe eſt, ſed etiam eius motus, quo primum procedere inceperit. Scilicet ſi motus a quiete inceperit, tum erit $\frac{ds}{dt} = 0$; ſin autem baculo initio iam certus motus fuerit impreſſus, hinc formula $\frac{ds}{dt}$ certum valorem nanciscetur. Deinde in ipſo initio non ſolum angulum $cCA = \Phi$ certum valorem habuiſſe neceſſe eſt, ſed etiam, ob motum impreſſum, celeritas angularis $\frac{d\Phi}{dt}$ datum quendam valorem accipiet: ſicque valores initiales harum quatuor quantitatum: 1°.) s, 2°.) $\frac{ds}{dt}$, 3°.) Φ, 4°.) $\frac{d\Phi}{dt}$, determinationem Problematis exhaurient, quibus cognitis totum negotium huc redit, vt ad quoduis tempus ſequens valores earundem quatuor quantitatum aſſignentur.

§. 16. Conſtituto igitur ſtatu initiali continuationem motus ſucceſſiue per gradus proſequi conueniet, quem in finem tempus in particulas ſatis exiguas diuiſum concipiamus, quarum ſingulas charactere differentiali dt deſignare liceat, quas quidem tam paruas accipi oportet, vt variatio motus in ſingulis producta quaſi infinite parua ſpectari poſſit. Cum igitur tempus in minutis ſecundis exprimi ſumſerimus, elementum dt certam quandam partem exiguam vnius minuti ſecundi denotet, cuiusmodi pars ſi vna decima ſufficere videatur, perpetuo nobis erit $dt = \frac{1}{10}$; fortaſſin etiam ſufficiet ipſi dt majorem fractionem tribui, niſi ſolutionem magis exactam deſiderauerimus. Quo minus enim a veritate aberrare voluerimus, eo minores fractiones pro dt aſſumi debebunt. Hoc enim modo, ſi pro initio cuiusque talis exigui interualli temporis quatuor memoratae quantitates s, $\frac{ds}{dt}$, Φ, $\frac{d\Phi}{dt}$ fuerint cognitae, tum ex ipſis aequationibus differentialibus ſecundi gradus earundem quantitatum valores pro fine huius tempuſculi colligere licebit, quorum ope deinceps ſequentia tempuſcula ſimili modo percurri poterunt.

§. 17. Quo autem haec operatio facilius inſtitui liceat, ponamus $\frac{ds}{dt} = p$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \theta$, vt ſit $ds = p\,dt$ et $d\Phi = \theta\,dt$; tum vero ad quoduis tempus t hos quatuor valores s, p, Φ, θ tanquam cognitos tractemus, et ad tempus $t + dt$ eos per s', p', Φ' et θ' indicemus, atque ex natura differentialium ſtatim patet fore

$$s' = s + ds = s + p\,dt \text{ et } \Phi' = \Phi + \theta\,dt,$$

qui ergo jam erunt cogniti. At vero ſimili modo erit

$$p' = p + dp \text{ et } \theta' = \theta + d\theta$$

vbi

vbi haec duo differentialia dp et $d\theta$ ex aequationibus differentio-differentialibus elicere oportebit, ita vt hoc modo nulla plane integratione indigeamus. His autem valoribus inuentis eadem operatio facile pro ſequentibus temporis particulis dt expediri poterit.

§. 18. Conſideremus igitur noſtras binas aequationes differentiales ſecundi gradus generaliſſimas, nulla plane adhibita reſtrictione, quae, poſito $ds = p\,dt$, $d\Phi = \theta\,dt$, hincque

$$dds = dp\,dt = (p' - p)\,dt,$$

ſimilique modo

$$dd\Phi = d\theta\,dt = (\theta' - \theta)\,dt,$$

ad ſequentes formas redigentur:

$$\text{I. } \frac{(p'-p)}{dt} - s\theta\theta + \frac{c(\theta'-\theta)}{dt} = 2g\,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{\lambda kk(\theta'-\theta)}{dt(s+\lambda b)},$$

$$\text{II. } 2p\theta + \frac{s(\theta'-\theta)}{dt} + c\theta\theta = 2g\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{kk(\theta'-\theta)}{dt(s+\lambda b)},$$

quae reducantur ad has:

$$\text{I. } \frac{p'-p}{dt} + \frac{\theta'-\theta}{dt}\left(c + \frac{\lambda kk}{s+\lambda b}\right) = 2g\,\text{ſin.}\,\Phi + s\theta\theta,$$

$$\text{II. } \frac{\theta'-\theta}{dt}\left(s + \frac{kk}{s+\lambda b}\right) = 2g\,\text{coſ.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta,$$

ex quarum poſteriore ſtatim habetur

$$\frac{\theta'-\theta}{dt} = \frac{2g\,\text{coſ.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta}{s + \frac{kk}{s+\lambda b}} = \frac{(2g\,\text{coſ.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta)(s+\lambda b)}{s(s+\lambda b) + kk},$$

vnde colligitur valor ipſius θ'. Tum vero ſi iſte valor pro $\frac{\theta'-\theta}{dt}$ in priore aequatione ſubſtituatur, etiam quantitas p' per mera elementa cognita cognoſcetur, ita vt pro tempuſculo ſequente habeamus iterum quaternas quantitates s', Φ', p' et θ', quae cum per meros numeros exprimantur, eas iterum ſimpliciter per litteras s, Φ, p et θ deſignare

ſignare licebit, ex quibus ſimili modo earum valores pro tempuſculo inſequente, ſiue ad tempus $t + 2dt$ definiri poterunt. Tales igitur operationes haud difficulter eo vsque continuare licebit, donec baculus a cylindro penitus fuerit delapſus.

§. 19. Hic autem duo occurrunt caſus, quibus motus iſte complicatus ceſſabit: alter locum habet ſi interuallum $BM = s$ toti portioni baculi MF euadit aequalis, quod ſi euenerit, baculus cylindrum deſerens motum conceptum libere proſequetur, quatenus ſcilicet a ſola grauitate ſollicitabitur. At vero etiam euenire poteſt, ſi portio baculi MF fuerit longior, vt baculus etiam, antequam punctum F vsque ad A pertingat, cylindrum deſerat, id quod continget, quando preſſio in puncto A, quam poſuimus $= \Pi$, euaneſcet; quare cum inuenerimus

$$\Pi = \frac{Mkk\,dd\Phi}{2g\,dt^2(s+\lambda b)} = \frac{Mkk(\theta'-\theta)}{2g\,dt(s+\lambda b)},$$

hoc eueniet quando fiet $\theta' - \theta = 0$; motus igitur hoc caſu eo vsque durabit, quoad fiat

$$(2g\,\text{coſ.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta)(s+\lambda b) = 0, \text{ ſiue}$$
$$2g\,\text{coſ.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta = 0, \text{ ſiue}$$
$$2g\,\text{coſ.}\,\Phi = \theta(c\theta + 2p),$$

quod, cum angulus Φ continuo creſcat, ideoque coſ. Φ decreſcat, ex altera vero parte tam θ quam p continuo creſcant, mox euenire debebit, niſi forte iam ante terminus F ſupra A fuerit praeterlapſus.

§. 20. Cum hic ſit $p = \frac{ds}{dt}$, littera p denotabit celeritatem progreſſiuam centri grauitatis baculi M, quatenus

ſecun-

ſecundum longitudinem B M promouetur, quam, ob gravitatem, continuo creſcere manifeſtum eſt; tum vero $\frac{dds}{dt^2} = \frac{(p'-p)}{dt}$ exprimet accelerationem huius motus; deinde vero littera $\theta = \frac{d\Phi}{dt}$ exprimit celeritatem angularem, qua baculus circa centrum cylindri C quouis momento gyratur ſiue ſupra horizontem eleuatur; tum vero formula $\frac{\theta'-\theta}{dt}$ accelerationem huius motus gyratorii denotabit. Quando ergo iſta acceleratio ceſſabit, baculus non amplius cylindro incumbet, ſed motu gyratorio iam concepto cylindrum penitus deſeret, totusque baculus a vi grauitatis praecipitabitur, cuius motus determinatio nulla amplius laborat difficultate.

§. 21. Denique etiam circa frictionem quaedam hic ſunt animaduertenda, quoniam frictio eatenus tantum habet locum, quatenus baculus ſuper puncto A prorepit; ſi enim tantum voluendo ſuper cylindro procederet, nullam frictionem pateretur. Quamobrem hic neceſſe eſt in celeritatem inquirere, qua baculus ſuper cylindro prorepit. Ad tempus igitur t tangat baculus cylindrum in A, ſitque $A\,m = s$; elapſo autem tempore dt fiat contactus in a, exiſtente angulo $A\,C\,a = d\Phi$, ſitque $a\,m' = s + ds$, eritque, ob radium cylindri $C\,A = a$ et arculum $A\,a = a\,d\Phi$, diſtantia $A\,m' = s + ds + a\,d\Phi$, vnde ſi auferatur diſtantia $A\,m = s = \alpha\,m'$, remanebit ſpatiolum $a\,\alpha$, per quod punctum baculi A interea proceſſit; vnde patet, frictionem tum demum ceſſare, quando fuerit $a\,d\Phi + ds = 0$, quod igitur nunquam eueniet, niſi initio baculo motus contrarius fuerit impreſſus. Hoc enim caſu excluſo vtraque celeritas $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ poſitiuum habebit valorem. Tab. I. Fig. 9.

§. 22. Quod ſi iam haec calculi praecepta ad caſus determinatos, quibus ſcilicet omnia elementa ſtatus initialis per numeros abſolutos fuerint data, accommodare velimus, circa quantitates ſingulas, quae hic occurrunt, ratione vnitatum, ad quas referantur, quaedam ſunt monenda. Ac primo quidem menſuram temporis iam ſtabiliuimus, quippe quam in minutis ſecundis exprimi aſſumimus. Deinde vero angulos Φ et θ in partibus radii, qui etiam vnitate deſignari ſolet, exprimi ſumamus, quos ergo, dum eorum ſinus et coſinus accipiuntur, ante ad menſuras ſolitas per gradus et minuta exprimi oportebit. Quantitates tandem longitudinales s et p, pariter ac altitudinem g, in menſuris conſuetis, veluti pedibus, exhibere licebit; vbi quidem, in gratiam calculi, eiusmodi pedes aſſumi conueniet, quorum 16 praebeant altitudinem lapſus g. His igitur praenotatis aliquem caſum ſpecialem per calculum euoluamus, cuius fortaſſe tractatio ſternere viam poterit ad ſolutionem completam noſtri Problematis propoſiti.

Deſcriptio caſus ſpecialis

hac methodo euoluendi.

§. 23. Sit baculus, ſeu potius trabs, parallelepipedum 12 pedes longum, cuius dimidia craſſities ſit ſemipedis (latitudo enim non in computum ingreditur). Centrum grauitatis autem in medium cadat, ita vt eius diſtantia ab vtroque termino ſit 6 pedum, cuius quadrati triens 12 dabit valorem ipſius kk, exiſtente dimidia craſſitie $b = 0,5$ pedis; tum vero ſit etiam diameter cylindri horizontalis, ſuper quo trabs delabitur, vnius pedis, eiusque radius $CA = 0,5$ et interuallum $BC = a + b = c = 1$ ped.

exiſtente

exiſtente altitudine $g = 16$ pedum; tum vero trabs initio cylindro ita horizontaliter in puncto c imponatur, vt eius centrum grauitatis M ad dextram promineat, interuallo $= 0,5$ ped. ex quo ſitu dimiſſa, incipiat delabi, ita vt initio ipſo fuerit $s = 0,5$; $p = 0$; $\Phi = 0$ et $\theta = 0$. Pro quouis ergo tempore elapſo $= t$ habebuntur iſtae duae aequationes:

$$\text{I. } \frac{\theta' - \theta}{dt} = \frac{(32 \cos. \Phi - \theta\theta - 2p\theta)s}{ss + 12};$$

$$\text{II. } \frac{p' - p}{dt} = 32 \sin. \Phi + s\theta\theta - \left(\frac{\theta' - \theta}{dt}\right);$$

vbi frictionem calculi commodioris gratia penitus negleximus.

§. 24. Incipiamus igitur ab ipſo initio motus, quo ſit tempus $t = 0$, et quia hoc momento habetur $s = 0,5$, $p = 0$ $\Phi = 0$ et $\theta = 0$, habebimus $\frac{\theta' - \theta}{dt} = \frac{64}{49} = 1,306$, hincque $\frac{p' - p}{dt} = -1,306$, ſicque erit $p' = -1,306 . dt$ et $\theta' = +1,306 . dt$, tum vero erit $s' = 0,5$ et $\Phi' = 0$.

§. 25. Sumamus nunc primum temporis interuallum $dt = \frac{1}{10}$ ſec. et quatuor elementa pro tempuſculo ſequente erunt

$$s = 0,5; \; p = -0,1306, \; \Phi = 0, \; \theta = 0,1306,$$

vnde colligetur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,3601, \; \frac{p' - p}{dt} = -1,2976,$$

hinc igitur fiet

$$s' = s + p\,dt = 0,5 - 0,1306 . dt;$$
$$p' = -0,1306 - 1,2976 . dt;$$
$$\Phi' = 0 + 0,1306 . dt;$$
$$\theta' = 0,1306 + 1,3061 . dt.$$

§. 26. Sumamus denuo $dt = \frac{1}{10}$, atque ad tempus $t = \frac{1}{5}$ ſec. elementa noſtri calculi erunt

$s = 0,4869$, $p = -0,2603$, $\Phi = 0,0131$, $\theta = 0,2612$, ſicque erit $\Phi = 45°$. Calculum igitur vt ante proſequendo reperiemus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,2759, \quad \frac{p' - p}{dt} = -0,8235,$$

erit ergo

$$s' = 0,4869 - 0,2603 \cdot dt;$$
$$p' = -0,2603 - 0,8235 \cdot dt;$$
$$\Phi' = 0,0131 + 0,2612 \cdot dt;$$
$$\theta' = 0,2612 + 1,2759 \cdot dt.$$

§. 27. Sumamus nunc denuo $dt = \frac{1}{10}$, et ad tempus $t = \frac{3''}{10}$ elementa calculi erunt

$s = 0,4609$, $p = -0,3426$, $\Phi = 0,0392$, $\theta = 0,3888$, ſicque erit $\Phi = 2°.\,15'$, quia portio $0,026$ reſpondet $1°.\,30'$. Hinc igitur reperietur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,2111, \quad \frac{p' - p}{dt} = 0,1149.$$

Hinc ergo erit

$$s' = 0,4609 - 0,3426 \cdot dt;$$
$$p' = -0,3426 + 0,1149 \cdot dt;$$
$$\Phi' = 2°.\,15 + 0,3888 \cdot dt;$$
$$\theta' = 0,3888 + 1,2111 \cdot dt.$$

§. 28. Statuamus denuo $dt = \frac{1}{10}$, vt tempus ab initio elapſum ſit $\frac{2''}{5}$, et elementa noſtra erunt

$s = 0,4266$, $p = -0,3311$, $\Phi = 0,0781$, $\theta = 0,5099$,

vnde calculo inſtituto reperitur

$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,1199$ et $\frac{p' - p}{dt} = 1,4942$, vnde ſit

$s' =$

$s' = 0,4266 - 0,3311 \cdot dt;$
$p' = -0,3311 + 1,4942 \cdot dt;$
$\Phi' = 4°. 29' + 0,5099 \cdot dt;$
$\theta' = 05099 + 1,1199 \cdot dt.$

§. 29. Statuatur denuo $dt = \frac{1}{10}$, et elementa pro tempore $t = \frac{5''}{10}$ ita ſe habebunt:

$s = 0,3935,\ p = -0,1817,\ \Phi = 7°. 25',\ \theta = 0,6219,$
quibus inuentis calculo conſueto inſtituto fiet

$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,0221$ et $\frac{p' - p}{dt} = 3,2608,$

vnde fit

$s' = 0,3935 - 0,1817 \cdot dt$
$p' = -0,1817 + 3,2608 \cdot dt,$
$\Phi' = 7°. 25' + 0,6219 \cdot dt,$
$\theta' = 0,6219 + 1,0221 \cdot dt.$

§. 30. Denuo ſtatuatur $dt = \frac{1}{10}$, et pro tempore $= \frac{6''}{10}$ elementa ita erunt comparata:

$s = 0,3753,\ p = 0,1444,\ \Phi = 10°. 59',\ \theta = 0,7241,$
quibus inuentis calculo pro inueſtigandis nouis p' et θ' inſtituto habemus

$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9484$ et $\frac{p' - p}{dt} = 5,3451,$

vnde colligitur

$s' = 0,3753 + 0,1444 \cdot dt,$
$p' = 0,1444 + 5,3451 \cdot dt,$
$\Phi' = 10°. 59' + 0,7241 \cdot dt,$
$\theta' = 0,7241 + 0,9484 \cdot dt.$

§. 31. Sumatur iterum $dt = \frac{1}{10}$, vt pro temporis momento $\frac{7}{10}''$ elementa fiant

$$s = 0,3897,\ p = 0,6789,\ \Phi = 15°.8'\ \text{et}\ \theta = 0,8189.$$

Calculum ergo vt ante proſequendo elicimus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9334,\ \frac{p' - p}{dt} = 7,6821,$$

vnde orietur

$$s' = 0,3897 + 0,6789 . dt,$$
$$p' = 0,6789 + 7,6821 . dt,$$
$$\Phi' = 15°. 8' + 0,8189 . dt,$$
$$\theta' = 0,8189 + 0,9334 . dt.$$

§. 32. Quoniam motus iam regularior fieri incipit quam initio, nunc interuallum dt augere poterimus: ſumamus ergo $dt = \frac{1}{5}''$, atque elapſo tempore $\frac{9}{10}''$ erit

$$s = 0,5255,\ p = 2,2153,\ \Phi = 24°. 33',\ \theta = 1,0056,$$

vnde fit

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,0141\ \text{et}\ \frac{p' - p}{dt} = 12,8129,$$

quocirca fiet

$$s' = 0,5255 + 2,2153 . dt,$$
$$\Phi' = 24°. 33' + 1,0056 . dt,$$
$$p' = 2,2153 + 12,8129 . dt,$$
$$\theta' = 1,0056 + 1,0141 . dt.$$

§. 33. Sit iterum $dt = \frac{1}{5}''$, ita vt elapſo tempore $t = 1\frac{1}{10}$ elementa noſtra ſint

$$s = 0,9686,\ p = 4,7779,\ \Phi = 36°. 9',\ \theta = 1,2084,$$

quibus inuentis porro colligitur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9606\ \text{et}\ \frac{p' - p}{dt} = 19,3306,$$

hinc porro nanciſcemur

$s' =$

$s' = 0{,}9686 + 4{,}7779 \cdot dt,$
$p' = 4{,}7779 + 19{,}3306 \cdot dt,$
$\Phi' = 36^\circ.\, 9' + 1{,}2084 \cdot dt,$
$\theta' = 1{,}2084 + 0{,}9606 \cdot dt.$

§. 34. Adhuc ſumatur $dt = \frac{1}{5}''$, et elapſo tempore $1\frac{3}{10}''$ elementa noſtra erunt

$s = 1{,}9242,\; p = 8{,}6440,\; \Phi = 50^\circ.\, 8',\; \theta = 1{,}4005,$

ex quibus, ſi ſecundum praecepta data computemus, formula

$32 \,\text{coſ.}\, \Phi - \theta\, (\theta + 2p)$

iam fit negatiua; vnde intelligitur, trabem iam ante hoc tempus $1\frac{3}{10}''$ cylindrum penitus deſeruiſſe et nunc motu libero per ſolam grauitatem delabi, pro motu quem centrum grauitatis hoc momento iam concepit; tum vero etiam motum gyratorium, quem hoc momento habuit, perpetuo conſeruabit, cuius celeritas angularis cum ſit

$\frac{d\Phi}{dt} = \theta = 1{,}4005,$

ſingulis minutis ſecundis angulum conficiet hoc numero expreſſum. Quamobrem ſingulis minutis ſecundis motu angulari per angulum $80^\circ.\, 12'$ gyrabitur.

§. 35. Haec quidem determinatio motus non mediocriter a veritate aberrabit, propterea quod temporis interualla nimis magna ſunt aſſumta, quandoquidem circa finem noſtra elementa nimis magnas mutationes ſunt paſſa, quam vt motus vniformis per vnum interuallum pro aequabili haberi poſſet. Interim tamen, neglectis minutiis, hinc ſatis diſtinctam nanciſcimur ideam motus quo noſtra trabs delabetur. Hinc enim diſcimus, ſtatim ab initio trabem tardiſſime ad motum concitari, atque adeo, dum ſuper

per cylindro inclinatur, in contactu A retro repere. Cum enim celeritas prorepens ſupra inuenta ſit

$$\frac{ds}{dt} + \frac{\frac{1}{2}d\Phi}{dt} = p + \tfrac{1}{2}\theta,$$

ab initio per aliquod tempus haec quantitas, ſeu eius duplum $\theta + 2p$ manſit negatiuum, atque videmus elapſo demum dimidio minuto ſecundo baculum antrorſum repere incipere, a quo tempore ſatis prompte deſcendendo prolabitur. Cauſſa huius phoenomeni in eo eſt ſita: quod centrum grauitatis M circa initium alium motum concipere nequit, niſi verticalem, eumque adeo lentiſſimum; tum enim demum, quando trabs iam ſatis notabilem inclinationem eſt nacta, motum horizontalem recipere poteſt.

Emendatio Solutionis praecedentis.

§. 36. Quo autem aberratio iſtius methodi a veritate diminuatur, calculum ſequenti modo inſtitui conueniet, vbi quidem eidem exemplo determinato inſiſtemus. Ponamus ad tempus $= t$ ab initio elapſum iam hos valores eſſe inuentos: $p = e$, $s = f$, $\theta = \varepsilon$ et $\Phi = \zeta$, tum vero elapſo inſuper tempuſculo $= \tau$ haec elementa abire in p', s', θ' et Φ', ad quorum valores inueſtigandos ſtatuamus
$p' = e + A\tau + B\tau\tau$, vnde cum ſit $s' = \int p'\,d\tau$, fiet

$$s = f + e\tau + \tfrac{1}{2}A\tau\tau + \tfrac{1}{3}B\tau^3.$$

Simili modo ſit $\theta' = \varepsilon + \alpha\tau + \beta\tau\tau$, vnde colligitur

$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3,$$

vbi quidem ſumamus angulum ζ more ſolito in gradibus et minutis dari, partes autem adiectas $\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3$ in partibus radii exprimi, vt hinc fiat

ſin.

$$\text{ſin.}\,\Phi' = \text{ſin.}\,\zeta\ \text{coſ.}\,(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3)$$
$$+ \text{coſ.}\,\zeta\ \text{ſin.}\,(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\Phi' = \text{coſ.}\,\zeta\ \text{coſ.}\,(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3)$$
$$- \text{ſin.}\,\zeta\ \text{ſin.}\,(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3).$$

§. 37. Quia autem in hac euolutione non vltra ſecundam poteſtatem ipſius τ aſcendere conuenit, erit

$$\text{coſ.}\,(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) = 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) = \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau,$$

ſicque habebimus

$$\text{ſin.}\,\Phi' = (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau)\,\text{ſin.}\,\zeta + (\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau)\,\text{coſ.}\,\zeta \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\Phi' = (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau)\,\text{coſ.}\,\zeta - (\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau)\,\text{ſin.}\,\zeta,$$

quibus ſubſtitutis in ambabus noſtris aequationibus ſupra exhibitis et ad hunc caſum accommodatis:

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \frac{(32\ \text{coſ.}\,\Phi' - \theta'(\theta' + 2p'))\,s'}{s's' + 12} \text{ et}$$
$$\frac{p' - p}{\tau} = 32\ \text{ſin.}\,\Phi' + s'\theta'\theta' - \frac{(\theta' - \theta)}{\tau},$$

habebimus

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \alpha + \beta\tau \text{ et } \frac{p' - p}{\tau} = A + B\tau.$$

§. 38. Incipiamus igitur a formula

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \frac{(32\ \text{coſ.}\,\Phi' - \theta'(\theta' + 2p'))\,s'}{s's' + 12},$$

vbi cum ad partem ſiniſtram tempus τ non vltra primam dimenſionem aſſurgat, etiam in dextra parte altiores poteſtates reiiciamus. Hinc cum ſit

$$32\ \text{coſ.}\,\Phi' = 32\ \text{coſ.}\,\zeta - 32\,\varepsilon\tau\ \text{ſin.}\,\zeta \text{ et}$$
$$\theta' + 2p' = \varepsilon + 2e + (\alpha + 2A)\,\tau,$$

ducatur poſtrema aequatio in $\theta' = \varepsilon$ prodibitque

$$\theta'(\theta' + 2p') = \varepsilon\varepsilon + 2e\varepsilon + \tau(2\alpha\varepsilon + 2A\varepsilon + 2\alpha e).$$

Quia vero etiam haec euolutio nimis fieret moleſta, etiam primam poteſtatem τ reiiciamus, atque hinc obtinebimus

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \alpha = \frac{(32 \cos.\zeta - \varepsilon(\varepsilon + 2e))f}{ff + 12}.$$

Ex priore vero aequatione eodem modo elicimus

$$p' - p = A = 32 \sin.\zeta + \varepsilon\varepsilon f - \alpha.$$

Inuentis autem his duobus valoribus α et A habebimus pro tempore $t + \tau$ iſta elementa:

$$s' = f + e\tau + \tfrac{1}{2}A\tau\tau;$$
$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau;$$
$$p' = e + A\tau;$$
$$\theta' = \varepsilon + \alpha\tau.$$

§. 39. Hac ergo methodo praecedens ſolutio ita rectificatur, vt cum ſupra tantum ſumſiſſemus $s' = s + p\,dt$, vbi s reſpondet ipſi f et dt ipſi τ, ſiue $s' = f + e\tau$: hic valore accuratiore vtamur, ſcilicet

$$s' = f + e\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau;$$

ſimilique modo cum ante habuiſſemus $\Phi' = \Phi + \theta\,dt$, nunc habemus

$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau,$$

vnde etiam ſine errore interuallo temporis τ fortaſſe maiores valores tribuere licebit, id quod ex quantitate terminorum $\frac{1}{2}A\tau\tau$ et $\frac{1}{2}\alpha\tau\tau$ diiudicari poterit, vt ſcilicet altiores poteſtates ſequentes ſine errore negligi queant.

§. 40. Quod ſi ergo hac methodo correcta ipſum praecedentem caſum euoluere velimus et ab ipſo initio inchoemus, vbi erat $f = \frac{1}{2}$, $e = 0$, $\zeta = 0$ et $\varepsilon = 0$, ex noſtris

ſtris formulis colligemus $\alpha = 1,3061$ et $A = -1,3061$, ſicque pro tempore τ habebimus:

$$s' = \tfrac{1}{2} - 0,6530 . \tau\tau; \; p' = -1,3061 . \tau,$$
$$\Phi' = 0,6530 . \tau\tau; \quad \theta' = 1,3061 . \tau.$$

§. 41. Hic igitur videtur ſtatim tuto aſſumi poſſe $\tau = \frac{1''}{5}$, vnde elementa pro tempore $t = \frac{1''}{5}$ erunt

$$f = 0,4739, \; e = -0,2612, \; \zeta = 0,0261 = 1°.30', \; \varepsilon = 0,2612,$$

quibus inuentis colligitur

$$\alpha = 1,2427 \text{ et } A = -0,3728,$$

quocirca fit

$$s' = 0,4739 - 0,2612 . \tau - 0,1864 . \tau\tau;$$
$$p' = -0,2612 - 0,3728 . \tau;$$
$$\Phi' = 1°.30' + 0,2612 . \tau + 0,6213 . \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,2612 + 1,2427 . \tau.$$

§. 42. Sumamus iterum $\tau = \frac{1}{5}$, et pro tempore ab initio elapſo $t = \frac{2''}{5}$ elementa noſtra ita ſe habebunt:

$$f = 0,4142, \; e = -0,3357, \; \zeta = 5°.55' \text{ et } \varepsilon = 0,5097,$$

ex quibus erit

$$\alpha = 1,0860 \text{ et } A = 2,3202,$$

vnde fit

$$s' = 0,4142 - 0,3357 . \tau + 1,1601 . \tau\tau;$$
$$p' = -0,3357 . + 2,3202 . \tau;$$
$$\Phi' = 5°.55' + 0,5097 . \tau + 0,5430 . \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,5097 + 1,0860 . \tau.$$

§. 43. Statuatur denuo $\tau = \frac{1}{5}$, vnde pro tempore $t = \frac{3''}{5}$ ab initio elapſo elementa noſtra erunt

$f = 0{,}3935$, $e = 0{,}1283$, $\zeta = 13°.\,1'$, $\varepsilon = 0{,}7269$,

quibus inuentis porro colligitur

$\alpha' = 0{,}9862$, $A = 6{,}4292$.

Sicque erit

$s' = 0{,}3935 + 0{,}1283 . \tau + 3{,}2146 . \tau\tau$;

$p' = 0{,}1283 + 6{,}4292 . \tau$;

$\Phi' = 13°.\,1' + 0{,}7269 . \tau + 0{,}4931 . \tau\tau$;

$\theta' = 0{,}7269 + 0{,}9862 . \tau$.

§. 44. Sit iterum $\tau = \frac{1}{5}$, ita vt elementa noſtra pro tempore $t = \frac{4}{5}$ fiant

$f = 0{,}5477$, $e = 1{,}4141$, $\zeta = 22°\ 31'$, $\varepsilon = 0{,}9241$.

Calculo igitur vt hactenus inſtituto reperietur

$\alpha = 1{,}1619$, $A = 11{,}5603$,

quocirca orietur

$s' = 0{,}5477 + 1{,}4141 . \tau + 5{,}7801 . \tau\tau^2$;

$p' = 1{,}4141 + 11{,}5603 . \tau$;

$\Phi' = 22°.\,31' + 0{,}9241 . \tau + 0{,}5809 . \tau\tau$;

$\theta' = 0{,}9241 + 1{,}1619 . \tau$.

§. 45. Sumamus adhuc $\tau = \frac{1}{5}$ et quatuor elementa noſtra ita ſe habebunt pro tempore $t = 1''$:

$f = 1{,}0617$, $e = 3{,}7262$, $\zeta = 34°.\,31'$, $\varepsilon = 1{,}1565$,

calculo igitur vt ante proſecuto elicitur

$\alpha = 1{,}3273$ et $A = 18{,}2254$,

vnde porro fit

$s' =$

$s' = 1,0617 + 3,7262.\tau + 9,1127.\tau\tau$;
$p' = 3,7262 + 18,2254.\tau$;
$\Phi' = 34^\circ.31' + 1,1565.\tau + 0,6636.\tau\tau$;
$\theta' = 1,1565 + 1,3273\,\tau$.

§. 46. Sit iterum $\tau = \frac{1}{5}$ et elapſo ab initio tempore $t = \frac{6''}{5}$, elementa erunt

$$f = 2,1714,\ e = 7,3713,\ \zeta = 49^\circ.28',\ \varepsilon = 1,4219,$$

ex quibus porro colligitur

$$32\ \text{coſ.}\ \zeta - \varepsilon(\varepsilon + 2e) = -2,1878$$

qui valor cum ſit negatiuus, ſequitur trabem iam cylindrum deſeruiſſe, quare ad momentum inueniendum, quo hoc contigit, ipſi τ valorem aliquanto minorem tribui oportet, quem ex praecedentibus formulis haud difficulter colligere licet. Quaeratur ſcilicet tempus τ, quo fit

$$32\ \text{coſ.}\ \Phi' = \theta'(\theta' + 2p),$$

quem ergo calculum expediamus.

§. 47. Cum ſit

$$\Phi' = 34^\circ.31' + 1,1565.\tau + 0,6661.\tau\tau,\ \text{erit}$$
$$\text{coſ.}\ \Phi' = \text{coſ.}\ 34^\circ.31'(1 - \tfrac{1}{2}(1,1565)^2.\tau\tau)$$
$$- \text{ſin.}\ 34^\circ.31'(1,1565.\tfrac{1}{2}(1,3273)^2\tau\tau$$

qui valor euolutus praebet

$$\text{coſ.}\ \Phi' = 0,82396 - 0,65533.\tau - 0,92795.\tau\tau,$$

ideoque

$$32\ \text{coſ.}\ \Phi' = 26,36672 - 20,97050.\tau - 29,66560.\tau\tau.$$

Pro altera autem parte quia eſt

$$\theta' = 1,1565 + 1,3273.\tau\ \text{et}$$

 $\theta' +$

$$\theta' + 2\,p' = 8,6089 + 37,7781.\tau, \text{ erit}$$

$$\theta'(\theta' + 2\,p') = 9,9562 + 55,1570.\tau + 50,1429.\tau\tau$$

vnde pro tempore τ definiendo haec habebitur aequatio:

$$16,4105 = 76,1276.\tau + 79,8085.\tau\tau.$$

§. 48. Quia iam nouimus incognitam τ paullo minorem eſſe quam $\frac{1}{5}$, ponamus

$$\tau = \tfrac{1}{5} - z, \text{ vt ſit } \tau\tau = \tfrac{1}{25} - \tfrac{2}{5}\,z$$

quibus valoribus ſubſtitutis fiet

$$16,4105 = 18,4178 - 108,0508.\,z$$

vnde concluditur

$$z = \tfrac{2}{108} = 0,0185, \text{ ideoque } \tau = 0,1815,$$

ita vt tempus ab initio elapſum ſit 1, 1815; tum vero erit

$$f = 2,0381,\ e = 7,0341,\ \zeta = 47^\circ.\,44',\ \varepsilon = 1,3974,$$

et quia hinc per hypotheſin fit $\alpha = 0$, fiet $A = 27,6605$.

§. 49. His inuentis praecipua Phaenomena huius motus mirabilis clarius aſpectui exponamus; atque vt iisdem elementis vtamur, quibus aequationes differentiales ſecundi gradus continentur, meminiſſe oportet, nos hic ad quoduis tempus poſuiſſe $s = f$, deinde $\frac{ds}{dt} = p = e$, tum vero $\frac{dds}{dt^2} = \frac{p' - p}{dt} = A$. Pro angulo autem Φ nobis erat $\Phi = \zeta$, $\frac{d\Phi}{dt} = \theta = \varepsilon$, ac denique $\frac{dd\Phi}{dt^2} = \frac{\theta' - \theta}{dt} = \alpha$, quibus valoribus introductis phaenomena iſtius motus in ſequente tabula ſumus complexi.

Re-

Repraeſentatio motus, quo trabs §. 23. deſcripta ſuper axe cylindrico delabitur.

Temp. t	s	$\frac{ds}{dt}$	$\frac{dds}{dt^2}$	Φ	$\frac{d\Phi}{dt}$	$\frac{dd\Phi}{dt^2}$
0,000	0,500	0,000	− 1,306	0°. 0′	0,000	1,306
0,200	0,474	− 0,261	− 0,373	1. 30	0,261	1,243
0,400	0,414	− 0,336	+ 2,320	5. 55	0,509	1,086
0,600	0,393	+ 0,128	+ 6,429	13. 1	0,727	0,986
0,800	0,548	+ 1,414	+ 11,560	22. 31	0,924	1,162
1,000	1,062	+ 3,726	+ 1[illegible],225	34. 31	1,156	1,327
1,181	2,038	+ 7,034	+ 27,660	47. 44	1,397	0,000

§. 50. Elapſo igitur tempore $t = 1,181$ trabs a cylindro penitus recedere incipiet et dehinc libere motu acquiſito delabetur; vbi quidem centrum grauitatis motum in parabola proſequetur, dum motus gyratorius, quem iam concepit, manebit vniformis, cuius ſcilicet celeritas angularis erit $= 1,397$, qua ergo ſingulis minutis ſecundis gyrabitur per angulum 80°. 10′. At ſi pro hoc momento locus centri grauitatis M deſideretur, is binis coordinatis iſtis determinatur:

$$x = s \text{ ſin. } \Phi - \text{coſ. } \Phi = 0,836 = CP \text{ et}$$
$$y = s \text{ coſ. } \Phi + \text{ſin. } \Phi = 2,1108 = PM.$$ Tab. I. Fig. 10.

Quin etiam ipſe motus, quem centrum grauitatis M hoc modo acquiſierit, hinc aſſignari poteſt: erit enim celeritas verticalis

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \text{ ſin. } \Phi + \frac{s\,d\Phi}{dt} \text{ coſ. } \Phi + \frac{d\Phi}{dt} \text{ ſin. } \Phi = 8,1550,$$

quae ergo celeritas deinceps vniformiter augebitur et ſingulis minutis ſecundis incrementum accipiet $= 32$ pedum. Celeritas denique horizontalis erit

dy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \operatorname{coſ}.\Phi - \frac{s\,d\Phi}{dt} \operatorname{ſin}.\Phi + \frac{d\Phi}{dt} \operatorname{coſ}.\Phi = 7,7785$$

quam celeritatem deinceps conſtanter inuariatam ſeruabit.

Conſiderationes ſuper quaeſtione in genere propoſita.

§. 51. Ex exemplo allato, quod euoluimus, ſatis liquet, quo modo alios quoscunque huiusmodi caſus determinatos calculo expediri conueniat, vbi quidem inprimis eſt tenendum, interualla temporis eo minora accipi debere, quo minus a veritate aberrare voluerimus. Tum vero etiam, ſi frictionem negligere voluerimus, aequatio integralis, ex principio virium viuarum fluens, haud leue ſubſidium afferre poterit; quam ob rem iſtam aequationem integralem hic adhuc adiiciamus.

§. 52. Omiſſa autem frictione ambae aequationes differentiales ſecundi gradus, quibus ſolutio problematis continetur, ita erant comparatae:

$$\text{I. } dds - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2 \operatorname{ſin}.\Phi,$$

$$\text{II. } 2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2 \operatorname{coſ}.\Phi - \frac{kk\,dd\Phi}{s}.$$

Iam ducatur prima in $2\,ds + 2\,c\,d\Phi$, altera vero in $2\,s\,d\Phi$ et in vnam ſummam collectae dabunt

$$2\,ds\,dds + 2\,s\,ds\,d\Phi^2 + 2\,ss\,d\Phi\,dd\Phi + 2(cc + kk)\,d\Phi\,dd\Phi$$
$$+ 2\,c\,ds\,dd\Phi + 2\,c\,d\Phi\,dds$$
$$= 4\,g\,dt^2(ds \operatorname{ſin}.\Phi + c\,d\Phi \operatorname{ſin}.\Phi + s\,d\Phi \operatorname{coſ}.\Phi),$$

cuius integrale ſponte ſe prodit

$$ds^2 + ss\,d\Phi^2 + (cc + kk)\,d\Phi^2 + 2\,c\,d\Phi\,ds$$
$$= 4\,g\,dt^2(s \operatorname{ſin}.\Phi - c \operatorname{coſ}.\Phi + C)$$

vbi conſtantem C ex ſtatu initiali definiri oportet.

§. 53.

§. 53. Aequatio haec integralis concinnius hoc modo repraeſentari poterit:

$$(ds+c\,d\Phi)^2+(kk+ss)\,d\Phi^2=4g\,dt^2(s\,\text{ſin.}\,\Phi-c\,\text{coſ.}\,\Phi+C)$$

quae, ſi vt ſupra faciamus $\frac{ds}{dt}=p$ et $\frac{d\Phi}{dt}=\theta$, accipiet hanc formam:

$$(p+c\theta)^2+(kk+ss)\theta\theta=4g(s\,\text{ſin.}\,\Phi-c\,\text{coſ.}\,\Phi+C)$$

ex qua aequatione pro quouis tempore, ſi iam innotuerit valor ipſius θ praeter variabiles principales s et Φ, valor litterae p commode aſſignari poterit, quo pacto calculus ſupra adhibitus ad maiorem certitudinem euehi poterit.

§. 54. Quod ſi vero etiam frictionis rationem habere lubuerit, vnice aequationibus differentialibus ſecundi gradus inhaerere cogimur, quae erant:

I. $dds-s\,d\Phi^2+c\,dd\Phi+\frac{\lambda kk\,dd\Phi}{s+\lambda b}=2g\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi$;

II. $2\,ds\,d\Phi+s\,dd\Phi+c\,d\Phi^2+\frac{kk\,dd\Phi}{s+\lambda b}=2g\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi$;

vbi littera λ ex quantitate frictionis definiri oportet, cuius valor vulgo aeſtimari ſolet $=\frac{1}{3}$, qui autem, ſi ſuperficies magis minusue fuerint politae, etiam ſiue minor ſiue maior accipi debebit. Hic autem valor tantum locum habet, quando reuera datur attritus. At ſi minor valor ſufficiat ad attritum auertendum, tum etiam ipſi λ minor iſte valor tribui debebit, hancque cautelam in ſingulis temporis interuallis ſollicite obſeruaſſe neceſſe eſt. Cum igitur ſit celeritas attritus $=\frac{ds}{dt}+\frac{a\,d\Phi}{dt}$, valor huius formulae in tempore expreſſus nihilo aequetur, indeque eliciatur valor litterae λ, qui ſi minor prodeat quam $\frac{1}{3}$, is in calculum introducatur, eritque tum $\frac{ds}{dt}=-\frac{a\,d\Phi}{dt}$; ſin autem maior pro-

 die-

dierit, tum ſumi oportet $\lambda = \frac{1}{3}$, quo caſu aderit attritus.

Inueſtigatio motus trabis, quamdiu ob frictionem attritus in contactu A auertitur.

§. 55. Si ſtatus initialis trabis ſuper cylindro ita fuerit comparatus, vt in contactu nullus detur attritus; tum vel minima frictio valebit attritum per aliquod tempus impedire, quamdiu ſcilicet ad hoc praeſtandum minor valor litterae λ ſufficit quam $\frac{1}{3}$, ſiquidem hanc fractionem $\frac{1}{3}$ pro maxima vi, quam frictio exerere valet, aſſumamus. Quamdiu autem nullus ad fuerit attritus, ſingulari prorſus commodo vſu venit, vt motus trabis, qui ſine frictione foret inperſcrutabilis, expediri poſſit, id quod vtique operae pretium erit luculentius oſtendiſſe.

§. 56. Cum celeritas attritus in contactu A ſit $= \frac{ds}{dt} + \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ponamus eam initio motus fuiſſe nullam, et videamus, per quantum temporis ſpatium ea euaneſcens ſit manſura. Hunc in finem in noſtris aequationibus ſtatim ponamus $ds = -a\,d\Phi$, hincque $dds = -a\,dd\Phi$ et $s = f - a\Phi$. His autem valoribus ſubſtitutis binae noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$\text{I.}\quad -a\,dd\Phi - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi - 2g\,dt^2 \,\text{ſin.}\,\Phi = -\frac{\lambda kk\,dd\Phi}{s + \lambda b};$$

$$\text{II.}\quad -2a\,d\Phi^2 + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2 - 2g\,dt^2 \,\text{coſ.}\,\Phi = -\frac{kk\,dd\Phi}{s + \lambda b};$$

quarum prior per poſteriorem diuiſa ſtatim dat

$$\lambda = \frac{(c-a)\,dd\Phi - s\,d\Phi^2 - 2g\,dt^2 \,\text{ſin.}\,\Phi}{(c-2a)\,d\Phi^2 + s\,dd\Phi - 2g\,dt^2 \,\text{coſ.}\,\Phi},$$

qui valor quamdiu minor fuerit quam $\frac{1}{3}$, motus quem inueſtigamus reuera locum habebit; ſimulac vero maiorem obti-

obtinebit valorem, tum eius loco fractio $\frac{1}{3}$ ſcribi debebit, et reſolutio aequationum prorſus alio modo erit inſtituenda; quandoquidem tum trabs ſuper cylindro prorepere incipiet.

§. 57. Cum poſuerimus $c = a + b$, valor ipſius λ hoc modo concinnius exprimetur:

$$\lambda = \frac{-b\,d\,d\,\Phi + s\,d\,\Phi^2 + 2\,g\,d\,t^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{(a-b)\,d\,\Phi^2 - s\,d\,d\,\Phi + 2\,g\,d\,t^2\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

vbi litteram s loco $f - a\,\Phi$ breuitatis gratia relinquimus. Hinc igitur colligimus

$$s + \lambda b = -\frac{(b\,b + s\,s)\,d\,d\,\Phi + a\,s\,d\,\Phi^2 + 2\,b\,g\,d\,t^2\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\,g\,s\,d\,t^2\,\text{coſ.}\,\Phi}{(a-b)\,d\,\Phi^2 - s\,d\,d\,\Phi + 2\,g\,d\,t^2\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 58. Hoc valore pro $s + \lambda b$ inuento, eum in poſteriore aequatione ſubſtituamus, quae cum hanc induat formam:

$$k\,k\,d\,d\,\Phi = (s + \lambda b)\,[(a-b)\,d\,\Phi^2 - s\,d\,d\,\Phi + 2\,g\,d\,t^2\,\text{coſ.}\,\Phi]$$

facta ſubſtitutione obtinebimus

$$k\,k\,d\,d\,\Phi = -(b\,b + s\,s)\,d\,d\,\Phi + a\,s\,d\,\Phi^2$$
$$+ 2\,b\,g\,d\,t^2\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\,s\,g\,d\,t^2\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

quae eſt aequatio duas tantum continens variabiles Φ et t, in qua elementum $d\,t$ conſtans eſt aſſumtum.

§. 59. Quoniam hic ipſa quantitas t non ineſt, hanc aequationem commode ad differentialem primi gradus reducere licebit. Ponatur enim $d\,t = p\,d\,\Phi$, et quia $d\,d\,t = 0$, erit $p\,d\,d\,\Phi + d\,p\,d\,\Phi = 0$, hincque $d\,d\,\Phi = -\frac{d\,p\,d\,\Phi}{p}$; quo valore ſubſtituto adipiscemur ſequentem aequationem:

$$0 = \frac{k\,k\,d\,p}{p} + \frac{(b\,b + s\,s)\,d\,p}{p} + a\,s\,d\,\Phi$$
$$+ 2\,b\,g\,p\,p\,d\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + 2\,g\,s\,p\,p\,d\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

 quae

quae reducatur ad hanc formam:

$$-(bb+kk+ss)\frac{dp}{p}=d\Phi(as+2bgpp\,\text{ſin.}\Phi+2gspp\,\text{coſ.}\Phi).$$

Ponamus inſuper $p=\frac{1}{q}$, vt fiat $\frac{dp}{p}=-\frac{dq}{q}$, et noſtra aequatio erit:

$$(bb+kk+ss)qdq=d\Phi(asqq+2bg\,\text{ſin.}\Phi+2gs\,\text{coſ.}\Phi).$$

§. 60. Transferamus nunc terminum $asqqd\Phi$ in alteram partem, et quia $ad\Phi=-ds$, habebimus hanc aequationem ſponte integrabilem:

$$(bb+kk+ss)qdq+sqqdds=2gd\Phi(b\,\text{ſin.}\Phi+s\,\text{coſ.}\Phi),$$

quippe cuius integrale eſt:

$$(bb+kk+ss)qq=4g\int(bd\Phi\,\text{ſin.}\Phi+sd\Phi\,\text{coſ.}\Phi)$$
$$=-4gb\,\text{coſ.}\Phi+4g\int sd\Phi\,\text{coſ.}\Phi,$$

quare cum ſit $s=f-a\Phi$, poſtremum membrum dabit

$$4gf\,\text{ſin.}\Phi-4ga\int\Phi d\Phi\,\text{coſ.}\Phi.$$

Eſt vero

$$\int\Phi d\Phi\,\text{coſ.}\Phi=\Phi\,\text{ſin.}\Phi+\text{coſ.}\Phi,$$

ita vt iam noſtra aequatio integrata ſit

$$(bb+kk+ss)qq=4g(f\,\text{ſin.}\Phi-a\Phi\,\text{ſin.}\Phi-(a+b)\,\text{coſ.}\Phi+C),$$

ſiue

$$(bb+kk+ss)qq=4g(s\,\text{ſin.}\Phi-(a+b)\,\text{coſ.}\Phi+C),$$

quam conſtantem C ex ſtatu initiali definiri oportet.

§. 61. Quoniam igitur poſuimus

$$dt=pd\Phi=\frac{d\Phi}{q}\text{ erit }q=\frac{d\Phi}{dt},$$

quo valore ſubſtituto impetrabimus ſequentem determinatio-

nationem:

$$(bb+kk+ss)\frac{d\Phi^2}{dt^2} = 4g\,(s\,\sin.\Phi - (a+b)\cos.\Phi + C),$$

vnde porro deducimus

$$dt = \frac{d\Phi\,\sqrt{(bb+kk+ss)}}{2\sqrt{g}\,(s\,\sin.\Phi - (a+b)\cos.\Phi + C)},$$

cuius quidem formulae integratio haud patet, ſed facile per quadraturas conſtruitur, et inde plurimum praeſtitiſſe vtique videmur, quod ſaltem partem iſtius quaeſtionis abſtruſiſſimae tam optato ſucceſſu perficere contigerit.

§. 62. Cum autem iſte motus non diutius durare ſit cenſendus, quam donec valor litterae λ vsque ad limitem conſtitutum $\frac{1}{3}$ aſſurgat, per valores integrales modo inuentos etiam valorem litterae λ definiri oportet. Quoniam igitur inuenimus:

$$\lambda = \frac{-b\,dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 2g\,dt^2\,\sin.\Phi}{(a-b)\,d\Phi^2 - s\,dd\Phi + 2g\,dt^2\,\cos.\Phi},$$

hinc primo differentialia ſecundi gradus excludamus ope aequationis inuentae:

$$dd\Phi = \frac{as\,d\Phi^2 + 2bg\,dt^2\,\sin.\Phi + 2gs\,dt^2\,\cos.\Phi}{bb+kk+ss},$$

ac reperiemus

$$\lambda = \frac{-abs\,d\Phi^2 + (bb+kk+ss)s\,d\Phi^2 - (2bgs\,dt^2\cos.\Phi + 2g(kk+ss)\,dt^2\,\sin.\Phi}{(a-b)(bb+kk)\,d\Phi^2 - 2bgs\,dt^2\,\sin.\Phi + 2g\,(bb+kk)\,dt^2\cos.\Phi},$$

quae formula per poſitionem $d\Phi = q\,dt$ vlterius reducitur ad hanc:

$$\lambda = \frac{(bb+kk+ss)sqq - absqq - 2bgs\cos.\Phi + 2g(kk+ss)\sin.\Phi}{(a-b)(bb+kk)qq - 2bgs\,\sin.\Phi + 2g\,(bb+kk)\cos.\Phi},$$

vbi cum inuenerimus

$$qq = \frac{4g\,(s\,\sin.\Phi - (a+b)\cos.\Phi + C)}{bb+kk+ss},$$

hoc valore ſubſtituto concluditur tandem

$$\lambda = \frac{2s(bb+kk+ss-ab)(s\,\sin.\Phi - (a+b)\cos.\Phi + C) - (bb+kk+ss)(bs\cos.\Phi - (kk+ss)\sin.\Phi)}{2(a-b)(bb+kk)(s\,\sin.\Phi - (a+b)\cos.\Phi + C) - (bb+kk+ss)(bs\,\sin.\Phi - (bb+kk)\cos.\Phi)}.$$

§. 63. Hoc igitur modo valor ipſius λ per ſolum angulum Φ exprimitur. In huius autem fractionis tam numeratore quam denominatore triplicis generis membra occurrunt, quorum primum continet ſin. Φ, ſecundum coſ. Φ et tertium conſtantem C. Sic in numeratore membrum primi generis dat

$$(3bbss + 4kkss + 3s^4 - 2abss + bbkk + k^4)\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

membrum ſecundi generis:

$$-s\,\text{coſ.}\,\Phi\,(2ass + 3bss + 3bkk + 3b^3 + 2akk + 2aab),$$

et membrum tertii generis:

$$2s(bb + kk + ss - ab)\,C.$$

Simili modo pro denominatore erit membrum primi generis:

$$s\,\text{ſin.}\,\Phi.(2abb + 2akk - 3b^3 - 3bkk - bss),$$

ſecundi generis:

$$(3b^4 + 4bbkk + bbss - 2aabb - 2aakk + kkss + k^4)\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

tertii generis:

$$(2abb + 2akk - 2b^3 - 2bkk)\,C.$$

§. 84. Totum negotium hic eo redit, vt quouis caſu oblato diſpiciatur, quousque angulum Φ augere liceat, ante quam valor iſte pro λ inuentus limitem $\frac{1}{3}$ ſuperare incipiat, hoc enim vbi contigerit, motus, quem hic definimus, natura ſubito mutatur et trabs ſuper axe proiicere incipiet, quem motum aliter niſi per ipſas aequationes differentiales ſecundi gradus definire non licebit.

Appli-

Applicatio huius inueſtigationis ad caſum ſpecialem ſupra deſcriptum.

§. 65. Hic igitur iterum in motum eiusdem trabis inquiremus, quam ſupra iam ſumus contemplati; verum hoc diſcrimine, vt hic etiam frictionis rationem ſimus habituri; ipſum autem motum vlterius hac methodo proſequi non licebit, quam donec trabs ſuper cylindro prorepere incipiat. Habebimus igitur pro iſto caſu ſequentes valores:

$$a = \tfrac{1}{2},\ b = \tfrac{1}{2},\ c = 1,\ \text{et}\ kk = 12,$$

ſumamusque vt ante $2g = 32$, tum vero pro motus initio ſit

$$s = \tfrac{1}{2},\ \Phi = 0,\ \frac{ds}{dt} = 0,\ \text{et}\ \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

vnde cum hic ſumſerimus $s = f - a\Phi$, erit $f = \frac{1}{2}$, et quia erat $d\Phi = q\,dt$, ipſo initio etiam erit $q = 0$.

§. 66. His igitur valoribus admiſſis erit

$$ds = -\tfrac{1}{2}d\Phi;\ dds = -\tfrac{1}{2}dd\Phi\ \text{et}\ s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}d\Phi,$$

vnde aequationes pro motu fient

$$\text{I.}\ -\tfrac{1}{2}dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 32\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{12\lambda\,dd\Phi}{s + \frac{1}{2}\lambda}.$$

$$\text{II.}\ -s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{12\,dd\Phi}{s + \frac{1}{2}\lambda},$$

quarum illa per hanc diuiſa praebet

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2}dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 32\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{-s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

vnde fit

$$s + \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{-ss\,dd\Phi - \frac{1}{4}dd\Phi + \frac{1}{2}s\,d\Phi^2 + 32s\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi + 16\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{-s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 67.

§. 67. Cum igitur ex aequatione ſecunda ſit

$$12\,dd\Phi = (s + \tfrac{1}{2}\lambda)(32\,dt^2 \operatorname{coſ.}\Phi - s\,dd\Phi),$$

ſi valorem modo inuentum ſubſtituamus, habebimus

$$12\,dd\Phi = -ss\,dd\Phi - \tfrac{1}{4}dd\Phi + \tfrac{1}{2}s\,d\Phi^2$$
$$+ 32\,s\,dt^2 \operatorname{coſ.}\Phi + 16\,dt^2 \operatorname{ſin.}\Phi \text{ ſiue}$$
$$(\tfrac{49}{4} + ss)\,dd\Phi = \tfrac{1}{2}s\,d\Phi^2 + 32\,s\,dt^2 \operatorname{coſ.}\Phi + 16\,dt^2 \operatorname{ſin.}\Phi,$$

quae aequatio, vti ex praecedentibus colligere licet, integrabilis reddetur ſi per $2\,d\Phi$ multiplicetur; prodibit enim

$$2(\tfrac{49}{4} + ss)\,d\Phi\,dd\Phi - s\,d\Phi^3$$
$$= 32\,dt^2(2\,s\,d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi + d\Phi \operatorname{ſin.}\Phi),$$

vbi in ſecundo membro loco $d\Phi$ ſcribatur $-2\,ds$, vt habeatur

$$(\tfrac{49}{4} + ss)\,2\,d\Phi\,dd\Phi + 2\,s\,ds\,d\Phi^2$$
$$= 32\,dt^2(2\,s\,d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi + d\Phi \operatorname{ſin.}\Phi),$$

cuius integrale manifeſto eſt

$$(\tfrac{49}{4} + ss)\,d\Phi^2 = 32\,dt^2(-\operatorname{coſ.}\Phi + 2\textstyle\int s\,d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi).$$

Eſt vero

$$\textstyle\int s\,d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi = s \operatorname{ſin.}\Phi - \int ds \operatorname{ſin.}\Phi$$
$$= s \operatorname{ſin.}\Phi + \tfrac{1}{2}\textstyle\int d\Phi \operatorname{ſin.}\Phi = s \operatorname{ſin.}\Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{coſ.}\Phi,$$

conſequenter aequatio noſtra integralis erit

$$(\tfrac{49}{4} + ss)\,d\Phi^2 = 64\,dt^2(s \operatorname{ſin.}\Phi - \operatorname{coſ.}\Phi + C).$$

§. 68. Quoniam igitur haec aequatio differentialis eſt primi gradus et duas tantum variabiles t et Φ complectitur, propter $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi$, hinc ſolutio per quadraturas abſolui poterit: erit enim

$$64\,dt^2 = \frac{(\frac{49}{4} + ss)\,d\Phi^2}{s \operatorname{ſin.}\Phi - \operatorname{coſ.}\Phi + C}.$$

Hic

Hic autem ex cognito initio motus conſtans C determinari debet. Cum enim initio fuerit $\Phi = 0$, $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ et $s = \frac{1}{a}$, conſtans iſta ita definietur vt ſit $C = 1$, ita vt habeamus hanc aequationem:

$$64\, dt^2 = \frac{(\frac{49}{4} + ss)\, d\Phi^2}{s\, \text{ſin.}\, \Phi - \text{coſ.}\, \Phi + 1},$$

ſiue ſi vt ante ponamus $\frac{d\Phi}{dt} = q$, erit

$$(\tfrac{49}{4} + ss)\, qq = 64\, (s\, \text{ſin.}\, \Phi - \text{coſ.}\, \Phi + 1).$$

§. 69. Reſumamus nunc valorem pro λ primo inuentum, qui erat

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2}\, dd\Phi + s\, d\Phi^2 + 32\, dt^2\, \text{ſin}\, \Phi}{-s\, dd\Phi + 32\, dt^2\, \text{coſ.}\, \Phi},$$

modo autem inuenimus

$$dd\Phi = \frac{\frac{1}{2}\, s\, d\Phi^2 + 32\, s\, dt^2\, \text{coſ.}\, \Phi + 16\, dt^2\, \text{ſin.}\, \Phi}{\frac{49}{4} + ss},$$

vbi ſi loco $d\Phi$ ſcribamus $q\, dt$ erit

$$dd\Phi = \frac{dt^2\, (\frac{1}{2}\, sqq + 32\, s\, \text{coſ.}\, \Phi + 16\, \text{ſin.}\, \Phi)}{\frac{49}{4} + ss}.$$

Ac ſi pariter in valore λ loco $d\Phi$ ſcribamus $q\, dt$, habebimus

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2}\, dd\Phi + sqq\, dt^2 + 32\, dt^2\, \text{ſin.}\, \Phi}{-s\, dd\varphi + 32\, dt^2\, \text{coſ.}\, \varphi},$$

vbi ſi loco $\frac{dd\Phi}{dt^2}$ valorem modo inuentum ſubſtituamus, reperiemus

$$\lambda = \frac{48\, sqq - 64\, s\, \text{coſ}\, \varphi + 1536\, \text{ſin.}\, \varphi + 4\, s^3 qq + 128\, ss\, \text{ſin.}\, \varphi}{-2\, ssqq - 64\, s\, \text{ſin.}\, \varphi + 1568\, \text{coſ.}\, \varphi},$$

 vbi

vbi iam pro lubitu loco qq ſcribi poterit valor inuentus

$$qq = \frac{64(s\,\text{ſin.}\,\varphi - \text{coſ.}\,\varphi + 1)}{\frac{49}{4} + ss}.$$

§. 70. Quo autem calculum ſequentem pro maximo angulo φ inueniendo, cui conueniat $\lambda = \frac{1}{3}$, faciliorem reddamus, ponamus praeter $\frac{d\Phi}{dt} = q$ etiam $\frac{dd\Phi}{dt^2} = r$, ita vt ſit

$$\left(\tfrac{49}{4} + ss\right) r = \tfrac{1}{2} s qq + 32 s\,\text{coſ.}\,\varphi + 16\,\text{ſin.}\,\varphi,$$

ideoque

$$r = \frac{s qq + 64 s\,\text{coſ.}\,\varphi + 32\,\text{ſin.}\,\varphi}{\frac{49}{2} + 2ss},$$

exiſtente

$$qq = \frac{64(s\,\text{ſin.}\,\varphi - \text{coſ.}\,\varphi + 1)}{\frac{49}{4} + ss}.$$

Computatis autem pro quouis angulo φ valoribus qq et r erit

$$\lambda = \frac{-r + 2s\,qq + 64\,\text{ſin.}\,\Phi}{-2rs + 64\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

vnde, ſi pro lubitu aliquot valores angulo φ tribuantur, inde haud difficulter is angulus φ concluditur, cui reſpondeat $\lambda = \frac{1}{3}$.

§. 71. Faciamus periculum, ponendo $\varphi = 18°$, ſiue ſit in partibus radii $\varphi = 0{,}31416$, hincque erit $s = 0{,}34292$, vnde colligimus $qq = 0{,}80163$, hincque $r = 1{,}25474$, vnde conficitur $\lambda = 0{,}31783$, ideoque tantillo minus quam $\frac{1}{3}$, quamobrem ſi tota vis frictionis fuerit $= 0{,}3178\,\Pi$, denotante Π preſſionem, motus trabis per angulum $\varphi = 18°$ ſine

ſine attritu fieri poterit. Sin autem velimus vt prodeat $\lambda = \frac{1}{3}$, angulum ϕ aliquantillum vltra 18° augeri oportebit.

§ 72. Quoniam angulus ϕ non adeo magnus prodiit, vt eius ſinus notabiliter ab ipſo arcu diſcrepet, ita vt ſine ſenſibili errore ſumi poſſit $\text{ſin.}\,\phi = \phi$ et $\text{coſ.}\,\phi = 1 - \frac{1}{2}\phi\phi$, ob ss prae $\frac{49}{4}$ valde exiguum ſatis exacte erit $qq = \frac{128}{49}\phi$; quare cum $qq = \frac{d\Phi^2}{dt^2}$, erit $dt^2 = \frac{49\,d\Phi^2}{128\,\Phi}$ ideoque $dt = \frac{7\,d\Phi}{8\sqrt{2\Phi}}$, vnde integrando elicitur $t = \frac{7}{8}\sqrt{2\phi}$. Hinc ſi, vti aſſumſimus ſit $\phi = 0,31316$ et $2\phi = 0,62832$, ſequitur fore $t = 0,69359$, id quod egregie conuenit cum motu huius trabis ſupra definito; vnde patet, elapſo tempore $= \frac{7''}{10}$ fore angulum ϕ propemodum 18°, neque enim frictio in tempore ſenſibilem producit mutationem.

§. 73. Quin etiam in genere pro quouis angulo ϕ, per quem trabs ſine attritu procedet, tempus ſatis exacte aſſignari poterit, quandoquidem iſte arcus ϕ tam eſt paruus, vt eius poteſtates ſuperiores negligi queant. Cum enim in genere inuenerimus

$$qq = \frac{4g(s\,\text{ſin.}\,\Phi - (a+b)\,\text{coſ.}\,\Phi + C)}{bb+kk+ss},$$

ſi conſtantem C ita definiamus, vt initio, vbi fuerit $\phi = 0$, etiam $q = \frac{d\Phi}{dt}$ euaneſcat, tum ob $s = f - a\phi$; $\text{ſin.}\,\Phi = \Phi$ et $\text{coſ.}\,\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$ erit

$$qq = \frac{4g(f\Phi - \frac{1}{2}(a-b)\Phi\Phi)}{bb+kk+ss}.$$

Quare ſi in numeratore $\frac{1}{2}(a-b)\Phi\Phi$, in denominatore autem

tem

tem ss negligamus, fiet

$$qq = \frac{4fg\Phi}{bb+kk} = \frac{d\Phi^2}{dt^2},$$

hincque deducitur:

$$dt = \frac{d\Phi \,.\, \surd(bb+kk)}{2\surd fg\Phi},$$

cuius integrale eſt

$$t = \frac{\surd fg\Phi \surd(bb+kk)}{fg} = \surd\frac{\Phi(bb+kk)}{fg},$$

hocque tempus iam in minutis ſecundis erit expreſſum.

DE

DE MOTV CORPORIS AD DVO CENTRA VIRIVM FIXA ATTRACTI.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Inter Problemata Mechanica, quorum ſolutiones Geometris exacte perficere licuit, inſigni ſane loco habendum eſt illud, quo quaeritur de motu corporis ad bina centra virium fixa attracti, et cuius ſolutionem Illuſtris *Eulerus* tradidit primum quidem pro illo caſu ſpeciali, quo motus corporis in eodem plano peragitur, tum vero generatim pro motu quocunque corporis. (Vide Nou. Comment. Acad. Petrop. Tom. X et XI.) Quamuis autem Illuſtris *Eulerus* completam adeo ſolutionem huius Problematis tradiderit, vt in ea nihil deſideretur; tamen Illu-

ſtris Geometra de la Grange dignitate argumenti allectus, in iſto Problemate ſoluendo induſtriam quoque ſuam exercere voluit, quod eleganti analyſi Tom V. Miſcellaneor. Taurinenſium inſerta, perfecit. Quum igitur mihi quoque ante complures annos de hoc Problemate meditanti, haud prorſus inelegantes ſolutiones ſe obtulerint, non dubito quin Geometris gratum fuerit, ſi iſtarum brevem heic adumbrationem expoſuerim.

Tab. III Fig. 8. §. 2. Sint duo centra virium fixa A, B, quae iungantur linea recta A B, locus corporis C ad haec duo centra attracti ſit C, ideoque ductis rectis A C, B C, liquet vires quibus corpus C ad iſta puncta fixa A, B, attrahitur, per $\frac{A}{AC^2}$; $\frac{B}{BC^2}$ exprimi poſſe. Concipiamus nunc per A B ductum eſſe planum fixum A V B, in quod ex C demittatur normalis C V, tum vero ex V in rectam A B ducatur perpendicularis V U et iungatur C U. Hac igitur adhibita conſtructione ſequentibus vtamur denominationibus:

$$AB = a;\ AU = x;\ BU = AB - AU = t = a - x;$$
$$VU = y;\ CV = z;\ CU = w;\ AC = v;\ BC = u;$$
$$\text{ang. } CUV = \phi;\ \text{ang. } CAB = \eta;\ \text{ang. } CBA = \theta;$$

vbi quidem obſeruare licet ob C V normalem ad planum AVB et VU perpendicularem ad AB ceu interſectionem planorum A V B; A C B, eſſe C U quoque perpendicularem ad A B.

§. 3. Quia igitur vis qua C ad punctum fixum A attrahitur exprimatur per $\frac{A}{v^2}$; ſi iſta vis ſecundum tres directio-

directiones coordinatarum AB, VU, CV reſoluatur, conſequemur has tres vires: $\frac{Ax}{v^3}$; $\frac{Ay}{v^3}$; $\frac{Az}{v^3}$; ſimilique modo vis qua corpus C ad B attrahitur $\frac{B}{u^2}$ in iſtas tres vires reſoluetur: $\frac{Bt}{u^3}$; $\frac{By}{u^3}$; $\frac{Bz}{u^3}$. Per principia igitur Mechanica, ſi elementum $d\tau$ elemento temporis ſtatuatur proportionale, has obtinebimus aequationes differentiales:

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Ax}{v^3} + \frac{Bt}{u^3};$$
$$\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3};$$
$$\frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Az}{v^3} - \frac{Bz}{u^3}.$$

Quum vero ſit:

$$x = v \text{ coſ. } \eta;$$
$$t = u \text{ coſ. } \theta;$$
$$y = w \text{ coſ. } \Phi = v \text{ ſin. } \eta \text{ coſ. } \Phi;$$
$$z = w \text{ ſin. } \Phi = v \text{ ſin. } \eta \text{ coſ. } \Phi;$$

ex quo colligitur:

$$ddx = ddv \text{ coſ.}\eta - 2d\eta dv \text{ ſin.}\eta - v dd\eta \text{ ſin.}\eta - v d\eta^2 \text{ coſ.}\eta;$$
$$ddy = ddw \text{ coſ.}\Phi - 2dwd\Phi \text{ ſin.}\Phi - wdd\Phi \text{ ſin.}\Phi - wd\Phi^2 \text{coſ.}\Phi;$$
$$ddz = ddw \text{ ſin.}\Phi + 2dwd\Phi \text{ coſ.}\Phi + wdd\Phi \text{ coſ.}\Phi - wd\Phi^2 \text{ ſin }\Phi;$$

ſi ſequens fiat combinatio:

$$ddx \text{ coſ.}\eta + ddy \text{ ſin.}\eta \text{ coſ.}\Phi + ddz \text{ ſin.}\eta \text{ ſin.}\Phi;$$

primum quidem habebimus:

$$ddy \text{ ſin.}\eta \text{ coſ.}\Phi + ddz \text{ ſin.}\eta \text{ ſin.}\Phi = ddw \text{ ſin.}\eta - wd\Phi^2 \text{ ſin.}\eta;$$

tumque ob

$$ddw = ddv \text{ ſin.}\eta + 2dvd\eta \text{ coſ.}\eta + vdd\eta \text{ coſ.}\eta - vd\eta^2 \text{ ſin.}\eta;$$

ddx

$$\frac{ddx\,\text{coſ.}\,\eta + ddy\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\Phi + ddz\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\,\tau^2} = \frac{ddv - v(d\,\eta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}{d\,\tau^2}$$

$$= -\frac{A(v\,\text{coſ.}\,\eta^2 + v\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + v^2\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}{v^3} + \frac{B\,u\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\eta}{u^3}$$

$$-\frac{B(v\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + v\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}{u^3}$$

$$= -\frac{A}{v^2} + \frac{B\,u\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\eta}{u^3} - \frac{B\,v\,\text{ſin.}\,\eta^2}{u^3}.$$

Quum igitur ſit

$$CA : CB = \text{ſin.}\,CBA : \text{ſin.}\,CAB;$$

id eſt $v\,\text{ſin.}\,\eta = u\,\text{ſin.}\,\theta$; et

$$\text{coſ.}\,(\eta + \theta) = \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ}\,\theta - \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta,$$

inde colligitur:

$$\frac{ddv - v(d\,\eta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B}{u^2}(\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\eta - \text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta)$$

$$= -\frac{A}{v^2} + \frac{B\,\text{coſ.}\,(\eta + \theta)}{u^2}.$$

Similique modo obtinebimus:

$$\frac{ddu - u(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{B}{u^2} + \frac{A\,\text{coſ.}\,(\eta + \theta)}{v^2}.$$

§. 4. Quum ſit

$v^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $u^2 = t^2 + y^2 + z^2$, hinc

$v\,dv = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ et

$u\,du = t\,dt + y\,dy + z\,dz$;

ſi aequationes differentiales §. 3. allatae reſpectiue multiplicentur per dx, dy, dz et earum ſumma capiatur, conſequemur:

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{d\,\tau^2} = -\frac{A(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{u^3} - \frac{B(t\,dt + y\,dy + z\,dz)}{u^3}$$

$$= -\frac{A\,dv}{v^5} - \frac{B\,du}{u^3},$$

hincque integrando:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\,\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

ideo-

ideoque ob

$$d y = d w \operatorname{coſ.} \Phi - w\, d \Phi \operatorname{ſin.} \Phi \text{ et}$$
$$d z = d w \operatorname{ſin.} \Phi + w\, d \Phi \operatorname{coſ.} \Phi;$$
$$d y^2 + d z^2 = d w^2 + w^2 d \Phi^2;$$

tumque ob

$$d x^2 = d v^2 \operatorname{coſ.} \eta^2 - 2 v\, d \eta\, d v \operatorname{ſin.} \eta \operatorname{coſ.} \eta + v^2 d \eta^2 \operatorname{ſin.} \eta^2 \text{ et}$$
$$d w^2 = d v^2 \operatorname{ſin.} \eta^2 + 2 v\, d \eta\, d v \operatorname{ſin.} \eta \operatorname{coſ.} \eta + v^2 d \eta^2 \operatorname{coſ.} \eta^2;$$

fiet

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d \tau^2} = \frac{d v^2 + v^2 d \eta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = 2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right);$$

ſimilique modo:

$$\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{d \tau^2} = \frac{d u^2 + u^2 d \theta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = 2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right).$$

Quum igitur ſupra inuenerimus:

$$\frac{d d v - v (d y^2 + d \Phi^2 \operatorname{ſin.} \eta^2)}{d \tau^2} = - \frac{A}{v^2} + \frac{B \operatorname{coſ.} (\theta + \eta)}{u^2};$$
$$\frac{d d u - u (d \theta^2 + d \Phi^2 \operatorname{ſin.} \theta^2)}{d \tau^2} = - \frac{B}{u^2} + \frac{A \operatorname{coſ.} (\theta + \eta)}{v^2};$$

multiplicata priori harum aequationum per v, poſteriori per u, et addita ad priorem $\frac{d v^2 + v^2 d y^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2}$, ad poſteriorem $\frac{d u^2 + u^2 d \theta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2}$; conſequemur has aequationes differentiales:

$$\frac{v\, d d v + d v^2}{d \tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B (2 u + v \operatorname{coſ.} (\eta + \theta))}{u^2} + \frac{2 C}{a};$$
$$\frac{u\, d d u + d u^2}{d \tau^2} = \frac{B}{u} + \frac{A (2 v + u \operatorname{coſ.} (\eta + \theta))}{v^2} + \frac{2 C}{a}.$$

Quum vero in triangulo A C B, ſit

$$A B^2 = A C^2 + B C^2 - 2 A C . B C . \operatorname{coſ.} A C B,$$

introductis expreſſionibus Analyticis erit:

$$a^2 = v^2 + u^2 + 2 u v \operatorname{coſ.} (\eta + \theta), \text{ hinc}$$
$$\operatorname{coſ.} (\eta + \theta) = \frac{a^2 - v^2 - u^2}{2 u v},$$

 ideo-

ideoque introducto hoc valore pro coſ. $(\eta + \theta)$, tandem ad has peruen iemus aequationes differentiales:

$$(\text{I.})\quad \frac{v\,ddv + dv^2}{d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B(3u^2 - v^2 + a^2)}{2u^3} + \frac{2C}{a};$$

$$(\text{II.})\quad \frac{u\,ddu + du^2}{d\tau^2} = \frac{B}{u} + \frac{A(3v^2 - u^2 + a^2)}{2v^3} + \frac{2C}{a}.$$

§. 5. Quum ſit

$$v\,ddv + dv^2 = d.\,v\,dv \text{ et}$$

$$u\,ddu + du^2 = d.\,u\,du;$$

multiplicetur aequatio (I.) per $u\,du$ et aequatio (II.) per $v\,dv$, et productorum capiatur ſumma, quo facto prodibit:

$$\frac{u\,du.\,d.(v\,dv) + v\,dv.\,d.(u\,du)}{d\tau^2} = \frac{A\,u\,du}{v} + \frac{B\,du}{2u^2}(3u^2 - v^2 + u^2) + \frac{2C}{u}(u\,du + v\,dv)$$
$$+ \frac{B\,v\,dv}{u} + \frac{A\,dv}{2v^2}(3v^2 - u^2 + a^2).$$

Heic autem commodum accidit, vt iſta aequatio ſit integrabilis, exiſtente nimirum integrali:

$$(\text{III.})\quad \frac{v\,u\,dv\,du}{d\tau^2} = \tfrac{3}{2}(A\,v + B\,u) + A\frac{(u^2 - a^2)}{2v} + B\frac{(v^2 - a^2)}{2u}$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2 + u^2) + D\,a, \text{ ſiue}$$
$$\frac{v\,u\,dv\,du}{d\tau^2} = (A\,v + B\,u) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u}\right)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2 + u^2) + D\,a.$$

§. 6. Per aequationes primitiuas §. 3. allatas liquet eſſe:

$y\,ddz - z\,ddy = 0$; hincque $y\,dz - z\,dy = \alpha\,d\tau$;

exiſtente α quantitate conſtante; at vero

$y\,dz - z\,dy = w^2\,d\Phi$; hinc ponamus $w^2\,d\Phi = m\,a^2\,d\tau$.

Quum igitur ſupra inuenerimus:

$$\frac{dv^2 + v^2\,d\eta^2 + w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

mul-

multiplicata hac aequatione per w^2 et loco $w^4\, d\,\Phi^2$ ſubſtituto $m^2\, a^4\, d\,\tau^2$, conſequemur:

$$w^2 \left(\frac{d v^2 + v^2 d \eta^2}{d \tau^2}\right) = 2\, w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2\, a^4.$$

Nunc itaque in id intenti erimus vt quantitates w^2; $d v^2 + v^2\, d\,\eta^2$; per v et u, eorumque differentialia exprimamus; quum itaque ſit: $u^2 = v^2 - 2\, a\, v$ coſ. $\eta + a^2$; differentiando erit:

$$u\, d\, u = v\, d\, v - a\, d\, v \text{ coſ. } \eta + a\, v\, d\, \eta \text{ ſin. } \eta;$$

ex quo fit

$$d\, u = d\, v \left(\frac{v - a \text{ coſ. } \eta}{u}\right) + \frac{a\, v}{u}\, d\, \eta \text{ ſin. } \eta;$$

Atqui in triangulo A C B, eſt B C : A B = ſin. A : ſin. A C B, hinc ſi angulus A C B exprimatur per ψ, conſequemur: $u : a =$ ſin. η : ſin. ψ, quare loco termini $\frac{a\, v}{u}\, d\, \eta$ ſin. η, adhiberi poteſt $v\, d\, \eta$ ſin. ψ. Tum vero quia vti ex Geometricis conſtat eſt

$$\text{A C} = \text{A B coſ. A} + \text{B C coſ. A C B, ſiue}$$

$$v = a \text{ coſ. } \eta + w \text{ coſ. } \psi; \text{ fiet}$$

$$v - a \text{ coſ. } \eta = u \text{ coſ. } \psi \text{ et } \frac{v - a \text{ coſ. } \eta}{u} = \text{coſ. } \psi;$$

hincque colligitur:

$$d\, u = d\, v \text{ coſ. } \psi + v\, d\, \eta \text{ ſin. } \psi;$$

nec non

$$d\, u - d\, v \text{ coſ. } \psi = v\, d\, \eta \text{ ſin. } \psi;$$

ſumtis igitur quadratis

$$v^2\, d\, \eta^2 \text{ ſin. } \psi^2 = d\, u^2 - 2\, d\, u\, d\, v \text{ coſ. } \psi + d\, v^2 \text{ coſ. } \psi^2;$$

hincque

$$\text{ſin. } \psi^2 \left(d v^2 + v^2\, d\, \eta^2\right) = d\, u^2 - 2\, d\, u\, d\, v \text{ coſ. } \psi + d\, v^2.$$

Vlterius quia eſt

$$2 \triangle ACB = CU.AB = AC.BC.\text{ſin.}ACB,$$

habebimus: $a w = v u$ ſin. ψ; ideoque erit:

$$w^2 (dv^2 + v^2 d\eta^2) = \frac{v^2 u^2 \text{ſin.} \psi^2}{a^2} (dv^2 + v^2 d\eta^2),$$

hac igitur expreſſione introducta nunc iſtam conſequemur aequationem:

$$\frac{v^2 u^2}{a^2} \left(\frac{du^2 - 2 du dv \text{coſ.} \psi + dv^2}{d\tau^2}\right) = 2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^4;$$

ſiue ob coſ. $\psi = \frac{v^2 + u^2 - a^2}{2 v u}$,

$$\text{(IV.)} \quad \frac{vu(vu(dv^2 + du^2) - du dv(v^2 + u^2 - a^2))}{d\tau^2}$$
$$= 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^6.$$

§. 7. Quod ſi nunc ex aequatione §. 5. allata, valor ipſius $v u dv du$ determinetur, et in $v^2 + u^2 - a^2$, ducatur, hoc valore ſubſtituto haec prodibit aequatio:

$$v^2 u^2 \left(\frac{dv^2 + du^2}{d\tau^2}\right) = 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right)$$
$$- m^2 a^6 + (Av + Bu)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \frac{A}{2v}(v^2 + u^2 - a^2)^2 + \frac{B}{2u}(v^2 + u^2 - a^2)^2$$
$$+ \frac{C}{a}(v^2 + u^2)(v^2 + u^2 - a^2) + Da(v^2 + u^2 - a^2).$$

Quum igitur triangulum ABC praebeat:

$$4 a^2 w^2 = 2 a^2 v^2 + 2 a^2 u^2 + 2 v^2 u^2 - a^4 - u^4 - v^4;$$
$$4 a^2 w^2 + (v^2 + u^2 - a^2)^2 = 4 v^2 u^2;$$

nec non

$$4 a^2 w^2 + 2 (v^2 + u^2)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$= u^4 + 6 u^2 v^2 + v^4 - a^4;$$

hisce valoribus introductis iſta prodibit aequatio:

$v^2 u^2$

$$v^2 u^2 \left(\frac{dv^2 + du^2}{d\,T^2}\right) = (Av + Bu)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ 2vu(Au + Bv) + \frac{C}{2a}(u^4 + 6v^2 u^2$$
$$+ v^4 - a^4) + Da(v^2 + u^2 - a^2) - m^3 a^6;$$

Cum hac igitur aequatione ſi combinetur illa §. 5. inuenta per $2vu$ multiplicata:

$$2\frac{v^2 u^2 dv\, du}{d\,T^2} = 2vu(Av + Bu) + (Au + Bv)$$
$$(v^2 + u^2 - a^2) + \frac{2C}{a}(u^2 + v^2)vu + 2Davu,$$

ita vt poſterior ad priorem primum addatur, tum ab illa ſubtrahatur, hae prodibunt aequationes:

$$1^a.)\ v^2 u^2 \left(\frac{dv + du}{d\,T^2}\right)^2 = (A + B)((v+u)^2 - a^2(v+u))$$
$$+ \frac{C}{2a}((v+u)^4 - a^4) + Da((v+u)^2 - a^2) - m^3 a^6;$$
$$2^a.)\ v^2 u^2 \left(\frac{dv - du}{d\,T^2}\right)^2 = (A - B)((v-u)^3 - a^2(v-u))$$
$$+ \frac{C}{2a}((v-u)^4 - a^4) + Da((v-u)^2 - a^2) - m^3 a^6;$$

Diuiſa priori harum aequationum per poſteriorem, ſi ſtatuatur

$$v + u = ar,\quad v - u = as;$$

prodibit

$$\frac{dr^2}{ds^2} = \frac{(A+B)(r^3 - r) + \frac{C}{2}(r^4 - 1) + D(r^2 - 1) - m^2 a^3}{(A-B)(s^3 - s) + \frac{C}{2}(s^4 - 1) + D(s^2 - 1) - m^2 a^3};$$

in qua aequatione quum variabiles ſeparatae ſint, ipſum Problema pro reſoluto haberi debet.

§. 8. Caeterum ad aequationes ultimo loco allatas ſequenti quoque modo pertingere licet. Aequationum (I.) et (II.) cum aequatione (III.) iſta fiat combinatio:

$$2vu^2.(\text{I.}) + 2u^2 v.(\text{II.}) + 2(v+u).(\text{III.}),$$

eritque hinc:

$$\frac{2vu^2(vddv+dv^2)}{d\tau^2}+2uv^2\frac{(uddu+du^2)}{d\tau^2}+2(v+u)\frac{vudu dv}{d\tau^2}=$$
$$+2Au^2+\frac{Bv}{u}(3u^2-v^2+a^2)+\frac{4Cvu^2}{a}$$
$$+3(v+u)(Av+Bu)$$
$$+2Bv^2+\frac{Au}{v}(3v^2-u^2+a^2)+\frac{4Cuv^2}{a}$$
$$+\frac{A(v+u)(u^2-a^2)}{v}+\frac{B(v+u)(v^2-a^2)}{u}$$
$$+\frac{2C}{a}(v+u)(v^2+u^2)+2Da(v+u).$$

Quae aequatio ad hanc formam concinnam reducitur:

$$2v^2u^2\frac{(ddv+ddu)}{d\tau^2}+2vu\frac{(vdu+udv)(dv+du)}{d\tau^2}$$
$$=(A+B)(3(v+u)^2-a^2)+\frac{2C}{a}(v+u)^3+2Da(v+u).$$

Ideoque multiplicata aequatione vtrinque per $dv+du$ fiet integrabilis, integrali nimirum inde prodevnte

$$v^2u^2\frac{(dv+du)^2}{d\tau^2}=(A+B)((v+u)^3-a^2(v+u))$$
$$+\frac{C}{2a}(v+u)^4+Da(v+u)^2+Ea^3,$$

atque hoc integrale cum iſto ſupra inuento prorſus conſentit, poſito $E=-\frac{1}{2}C^2-D-m^2a^3$. Tum vero iſta combinatio:

$$2vu^2.(\text{I.})-2uv^2.(\text{II.})+2(v-u).(\text{III.})$$

ad hanc perducit aequationem:

$$2v^2u^2\frac{(ddv-ddu)}{d\tau^2}+2vu\frac{(vdu+udv)(dv-du)}{d\tau^2}$$
$$=(A-B)(3(v-u)^2-a^2)+\frac{2C}{a}(v-u)^3+2Da(v-u).$$

Atque haec aequatio per $dv-du$ multiplicata iterum fiet integrabilis, exiſtente integrali:

$$v^2u^2\frac{(dv-du)^2}{d\tau^2}=(A-B)((v-u)^3-a^2(v-u))$$
$$+\frac{C}{2a}(v-u)^4+Da(v-u)^2+Ea^3,$$

et

et heic quidem quantitas conſtans adiicienda prorſus congruere debet, cum illa pro ſuperiori aequatione. Vtcunque autem egregium hoc ſit artificium Analyticum, quo ad aequationes has differentiales perducimur, et cuius vſum adhibuit Illuſtris *de la Grange* in ſua ſolutione; tamen ſuperfluum haberi poſſet ad iſtas integrationes recurrere, ſiquidem aequatio integralis (III.) §. 5., cum iſta

$$w^2\left(\frac{dv^2+v^2d\eta^2}{d\tau^2}\right)=2\,w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2a^4,$$

combinata totum negotium abſoluit. Nam ſi binis integrationibus Problematis ſolutio perfici queat, minus conueniens iudicari poſſet, ſi ad nouam integrationem recurrere quis vellet.

§. 9. Quum ſit:

$$4\,a^2w^2=-\left((v+u)^2-a^2\right)\left((v-u)^2-a^2\right);\text{ fiet}$$

$$2\,a^2w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)$$
$$\left(a^2(v+u)^2+a^2(v-u)^2-a^4-(v-u)^2(v+u)^2\right).$$

Hinc quum ex aequatione (IV.) §. 6., ſit

$$\frac{v^2u^2(dv+du)^2}{d\tau^2}=\frac{vu\,dv\,du}{d\tau^2}\left((v+u)^2-a^2\right)$$
$$+\,2\,a^2w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2u^6;$$

tum vero ea aequatione (III.) §. 5.

$$\frac{vu\,dv\,du}{d\tau^2}=(A+B)(v+u)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}\right)\left((v-u)^2-a^2\right)$$
$$+\frac{C}{2a}\left((v+u)^2+(v-u)^2\right)+D\,a;$$

ducta hac aequatione in $(v+u)^2-a^2$, conſequemur:

$$\frac{v^2u^2(dv+du)^2}{d\tau^2}=(A+B)\left((v+u)^3-a^2(v+u)\right)$$
$$+\frac{C}{2a}\left((v+u)^4-a^4\right)+D\,a\left((v+u)^2-a^2\right)-m^2a^6,$$

pror-

prorſus vti §. 7. vel quia eſt:

$$\frac{v^2 u^2 (dv - du)^2}{d\tau^2} = \frac{v u d v d u}{d\tau^2} \left((v-u)^2 - a^2 \right)$$
$$+ 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right) - m^2 a^6;$$

nec non

$$\frac{v u d v d u}{d\tau^2} = (A - B)(v-u) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} \right)\left((v+u)^2 - a^2 \right)$$
$$+ \frac{C}{2a}\left((v+u)^2 + (v-u)^2 \right) + D a;$$

multiplicata hac aequatione per $(v-u)^2 - a^2$, prodibit:

$$\frac{v^2 u^2 (dv - du)^2}{d\tau^2} = (A - B)\left((v-u)^3 - a^2 (v-u) \right)$$
$$+ \frac{C}{2A}\left((v-u)^4 - a^4 \right) + D a \left((v-u)^2 - a^2 \right) - m^2 a^6.$$

§. 10. Si loco combinationis

$$d d x \,\text{coſ.}\, \eta + d d y \,\text{ſin.}\, \eta \,\text{coſ.}\, \Phi + d d z \,\text{ſin.}\, \eta \,\text{ſin.}\, \Phi,$$

in vſum vocetur iſthaec:

$$d d x \,\text{ſin.}\, \eta - d d y \,\text{coſ}\, \eta \,\text{coſ.}\, \Phi - d d z \,\text{coſ.}\, \eta \,\text{ſin.}\, \Phi;$$

ad hanc peruen iemus aequationem:

$$\frac{- v d d \eta - 2 d v d \eta + v d \Phi^2 \,\text{ſin.}\, \eta \,\text{coſ.}\, \eta}{d\tau^2} = \frac{B (\text{ſin.}\, \eta \,\text{coſ.}\, \theta + \text{ſin.}\, \theta \,\text{coſ.}\, \eta)}{u^2} = \frac{B \,\text{ſin.}\, \psi}{u^2};$$

quae etiam ſic exprimi poteſt:

$$\frac{v^2 d d \eta + 2 v d v d \eta}{d\tau^2} = - \frac{B v \,\text{ſin.}\, \psi}{u^2} + \frac{w^2 d \Phi^2}{d\tau^2} \,\text{cot.}\, \eta;$$

ſimilique modo obtinebimus:

$$\frac{u^2 d d \theta + 2 u d u d \theta}{d\tau^2} = - \frac{A u \,\text{ſin.}\, \psi}{v^2} + \frac{w^2 d \Phi^2}{d\tau^2} . \,\text{cot.}\, \theta.$$

Nunc priori harum aequationum per $u^2 d\theta$, poſteriori per $v^2 d\eta$ multiplicata, conſequemur hanc aequationem integrabilem:

$$\frac{u^2 d\theta . d.(v^2 d\eta) + v^2 d\eta . d.(u^2 d\theta)}{d\tau^2} = - B v d\theta \,\text{ſin.}\, \psi + \frac{w^2 u^2 d\Phi^2 d\theta . \text{cot.}\, \eta}{d\tau^2}$$
$$- A u d\eta \,\text{ſin.}\, \psi + \frac{w^2 v^2 d\Phi^2 d\eta \,\text{cot.}\, \theta}{d\tau^2};$$

quae

quae ob

$$v \text{ ſin. } \psi = a \text{ ſin. } \theta;\ u \text{ ſin. } \psi = a \text{ ſin. } \eta;$$

$$\frac{u^2}{w^2} = \frac{1}{\text{ſin.} \theta^2};\ \frac{v^2}{w^2} = \frac{1}{\text{ſin.} \eta^2} \text{ et } w^4 d\Phi^2 = m^2 a^4 d\tau^2;$$

ita exprimetur:

$$\frac{u^2 d\theta . d(v^2 d\eta) + v^2 d\eta . d(u^2 d\theta)}{d\tau^2} = -a A d\eta \text{ ſin.} \eta - a B d\theta \text{ ſin.} \theta$$
$$+ m^2 a^4 \left(\frac{d\theta \cot. \eta}{\text{ſin.} \theta^2} + \frac{d\eta \cot. \theta}{\text{ſin.} \eta^2}\right);$$

et ob

$$\frac{d\theta}{\text{ſin.} \theta^2} = -d. \cot. \theta;\ \frac{d\eta}{\text{ſin.} \eta^2} = -d. \cot. \eta;$$

integrando erit:

$$\text{(V.)}\ \frac{v^2 u^2 d\eta d\theta}{d\tau^2} = a A \text{ coſ.} \eta + a B \text{ coſ.} \theta - m^2 a^4 \cot. \theta \cot. \eta + F.$$

§. 11. Quia eſt vti §. 6. demonſtrauimus:

$$v\, d\eta = -dv \cot. \psi + \frac{du}{\text{ſin.} \psi}; \text{ et}$$

$$u\, d\theta = -du \cot. \psi + \frac{dv}{\text{ſin.} \psi}; \text{ erit}$$

$$v u\, d\eta\, d\theta = dv\, du \frac{(1 + \text{coſ.} \psi^2)}{\text{ſin.} \psi^2} - (du^2 + dv^2) \frac{\text{coſ.} \psi}{\text{ſin.} \psi^2}$$
$$= dv\, du - \text{coſ.} \psi \frac{(du^2 - 2 du\, dv \text{ coſ.} \psi + dv^2)}{\text{ſin.} \psi^2},$$

hincque

$$\frac{v^2 u^2 d\eta d\theta}{d\tau^2} = \frac{v u\, dv\, du}{d\tau^2} - \frac{v u \text{ coſ.} \psi (du^2 - 2 du\, dv \text{ coſ.} \psi + dv^2)}{d\tau^2 . \text{ſin.} \psi^2};$$

Per evndem autem §. 6. colligitur:

$$\frac{(du^2 - 2 du\, dv \text{ coſ.} \psi + dv^2)}{d\tau^2 \text{ſin.} \psi^2} = \frac{2 a^2 w^2}{v^2 u^2 \text{ſin.} \psi^2} \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - \frac{m^2 a^6}{v^2 u^2 \text{ſin.} \psi^2}$$
$$= 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - \frac{w^2 d\Phi^2}{d\tau^2};$$

ob $a^2 w^2 = v^2 u^2 \text{ ſin.} \psi^2$ et $m^2 a^4 = \frac{w^4 d\Phi^2}{d\tau^2}$. Hinc itaque fiet:

$$\frac{v u\, dv\, du}{d\tau^2} = v u \text{ coſ.} \psi \frac{(dv^2 - 2 dv\, du \text{ coſ.} \psi + du^2)}{d\tau^2 \text{ſin.} \psi^2}$$
$$+ a A \text{ coſ.} \eta + a B \text{ coſ.} \theta - m^2 a^4 \text{ coſ.} \theta \text{ coſ.} \eta + F;$$
$$= \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right)(v^2 + u^2 - a^2) - \frac{v u w^2 d\Phi^2 \text{ coſ.} \psi}{d\tau^2}$$
$$+ a A \text{ coſ.} \eta + a B \text{ coſ.} \theta - m^2 a^4 \text{ coſ.} \theta \text{ coſ.} \eta + F;$$

 ob

ob $2vu\,\text{coſ.}\,\psi = v^2 + u^2 - a^2$. Tum vero quia eſt:

$$a\,\text{coſ.}\,\eta = \frac{v^2 + a^2 - u^2}{2v} = v - \frac{(v^2 + u - a^2)}{2v};$$

$$a\,\text{coſ.}\,\theta = \frac{u^2 + a^2 - v^2}{2u} = u - \frac{(v^2 + u^2 - a^2)}{2u};\; m^2 a^4 = \frac{w^4\,d\Phi^2}{d\tau^2};$$

prodibit:

$$\frac{vu\,dv\,du}{d\tau^2} = Av + Bu + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{A}{v} + \tfrac{B}{u}\right)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \tfrac{C}{a}(v^2+u^2-a^2) - \frac{w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2}(vu\,\text{coſ.}\psi + w^2\cot.\theta\cot.\eta) + F.$$

Quum nunc ſit

$$vu\,\text{coſ.}\,\psi = -w^2(\cot.\theta\,.\,\cot.\eta - 1);\ \text{ob}$$
$$v = \frac{w}{\text{ſin.}\,\eta};\ u = \frac{w}{\text{ſin.}\,\theta};$$
$$\text{coſ.}\,\psi = -\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta,\ \text{erit}$$
$$-\frac{w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2}(vu\,\text{coſ.}\psi + w^2\cot.\theta\cot.\eta) = -\frac{w^4\,d\Phi^2}{d\tau^2} = -m^2a^4.$$

Hinc prodibit:

$$\frac{vu\,dv\,du}{d\tau^2} = Av + Bu + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{A}{v} + \tfrac{B}{u}\right)(v^2 + u^2 - a^2)$$
$$+ \tfrac{C}{a}(v^2 + u^2 - a^2) - m^2a^4 + F;$$

atque haec aequatio cum illa §. 5. inuenta perfecte conſentit; modo ſtatuatur.

$$Da = -Ca - m^2a^4 + F.$$

§. 12. Caeterum ad aequationes differentiales, quae differentialia ſecundi ordinis angulorum η et θ inuoluunt, ſic quoque pertingere licet: Quia eſt

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = ddv\,\text{coſ.}\eta - 2d\eta\,dv\,\text{ſin.}\eta - vdd\eta\,\text{ſin.}\eta - vd\eta^2\text{coſ.}\eta$$

fiet

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = \frac{1}{d\tau^2}(ddv\,\text{coſ.}\eta - 2d\eta\,dv\,\text{ſin.}\eta - vdd\eta\,\text{ſin}\,\eta - vd\eta^2\text{coſ.}\eta)$$
$$= -\frac{A\,\text{coſ.}\,\eta}{v^2} + \frac{B\,\text{coſ.}\,\theta}{u^2},$$

Mul-

Multiplicetur nunc aequatio:

$$\frac{ddv - v(d\eta^2 + d\Phi^2 \,\text{ſin.}\,\eta^2)}{d\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B \,\text{coſ.}\,(\eta + \theta)}{u^2},$$

per coſ. η et ſumta differentia conſequemur:

$$-\frac{v\,dd\eta \,\text{ſin.}\,\eta - 2dv\,d\eta \,\text{ſin.}\,\eta + v\,d\Phi^2 \,\text{ſin.}\,\eta^2 \,\text{coſ.}\,\eta}{d\tau^2} = \frac{B(\text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,(\theta + \eta)\,\text{coſ.}\,\eta)}{u^2},$$

hinc quum ſit

$$\text{ſin.}\,\psi \,\text{ſin.}\,\eta = \text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,(\theta + \eta)\,\text{coſ.}\,\eta;\ \text{ob}\ \text{ſin.}\,\psi = \text{ſin.}\,(\eta + \theta);$$

diuiſa aequatione per coſ. η, fit

$$\frac{v\,dd\eta + 2dv\,d\eta}{d\tau^2} = -\frac{B \,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} + \frac{v\,d\Phi^2 \,\text{ſin.}\,\eta \,\text{coſ.}\,\eta}{d\tau^2}.$$

Praeterea heic quoque obſeruaſſe iuuat, quod ſi aequatio differentialis:

$$\frac{v\,ddv + dv^2}{d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B(2u - v \,\text{coſ.}\,\psi)}{u^2} + \frac{2C}{a};$$

multiplicetur per $v\,dv$ et aequatio differentialis:

$$\frac{v^2\,dd\eta + 2v\,dv\,d\eta}{d\tau^2} = -\frac{B\,v \,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} + \frac{w^2\,d\Phi^2 \,\text{cot.}\,\eta}{d\tau^2},$$

multiplicetur per $v^2\,d\eta$; tumque earum capiatur ſumma

$$v\,dv\frac{(v\,ddv + dv^2)}{d\tau^2} + v^2\,d\eta\frac{(v^2\,dd\eta + 2v\,dv\,d\eta)}{d\tau^2}$$
$$= A\,dv + B\,v\,dv\frac{(2u - v \,\text{coſ.}\,\psi)}{u^2} + \frac{2C\,v\,dv}{a}$$
$$-\frac{B\,v^3\,d\eta \,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} + \frac{v^2\,w^2\,d\Phi^2\,d\eta \,\text{cot.}\,\eta}{d\tau^2},$$

erit haec aequatio integrabilis, ipſumque integrale inuenietur:

$$v^2\frac{(dv^2 + v^2\,d\eta^2)}{d\tau^2} = 2v^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - \frac{v^2\,w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2};\ \text{ob}$$

$$v^3\,d\eta \,\text{ſin.}\,\psi = v^2\,du - v^2\,dv \,\text{coſ.}\,\psi,$$

hincque

$$-\frac{B\,v^2\,dv \,\text{coſ.}\,\psi}{u^2} - \frac{B\,v^3\,d\eta \,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} = -\frac{B\,v^2\,du}{u^2},$$

vnde ſequitur

$$B\,v\,dv\,\frac{(2u - v\cos.\psi)}{u^2} - \frac{B\,v^3\,d\eta\,\sin.\psi}{u^2} = B\,v\,\frac{(2u\,dv - v^2\,du)}{u^2},$$

cuius integrale eſt $\frac{Bv^2}{u}$. Denique ob $v^2 = \frac{w^2}{\sin.\eta^2}$; fiet

$$\frac{v^2\,w^2\,d\Phi^2\,d\eta\,\cot.\eta}{d\tau^2} = \frac{w^4\,d\Phi^2\,.\,d\eta\,\cos.\eta}{d\tau^2\,.\,\sin.\eta^3},$$

cuius integrale eſt $-\frac{w^4\,d\Phi^2}{2\,d\tau^2\,\sin.\eta^2}$, ob factorem $-\frac{w^4\,d\Phi^2}{d\tau^2}$ conſtantem, hinc vero iterum colligitur

$$-\frac{w^4\,d\Phi^2}{2\,d\tau^2\,\sin.\eta^2} = -\frac{v^2\,w^2\,d\Phi^2}{a\,\tau^2}.$$

Sicque tandem emerget haec aequatio:

$$\frac{dv^2 + v^2\,d\eta^2 + w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right),$$

prorſus vti ſupra §. 4. inuenimus. Verum quum haec aequatio ipſam determinationem ingrediatur aequationis differentialis

$$\frac{v\,ddv + dv^2}{d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B\,(2u + v\cos.(\eta + \theta))}{u^2} + \frac{2C}{a};$$

ipſa haec integratio ab aequatione iſta redditur dependens.

§. 13. Caeterum ſequenti quoque ratione iſtam aequationem:

$$\frac{dv^2 + v^2\,d\eta^2 + w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

elicere licet; ob

$$\frac{ddv - v\,(d\eta^2 + d\Phi^2\,\sin.\eta^2)}{d\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B\cos.(\theta + \eta)}{u^2};$$

$$\frac{v\,dd\eta + 2\,dv\,d\eta}{d\tau^2} = -\frac{B\sin.\psi}{u^2} + \frac{v\,d\Phi^2\,\sin.\eta\,\cos.\eta}{d\tau^2};$$

multiplicata priori aequatione per $2\,dv$ et poſteriori per $2\,v\,d\eta$ et capta productorum ſumma habebimus:

$$\frac{2dv\,ddv + 2v^2 d\eta\,dd\eta + 2v\,dv\,d\eta^2}{d\tau^2} - \frac{2v\,dv\,d\Phi^2\,\sin.\eta^2}{d\tau^2} - \frac{2v^2 d\Phi^2 d\eta\,\sin.\eta\cos.\eta}{d\tau^2}$$
$$= -\frac{2A\,dv}{v^2} + \frac{2B\,dv\cos.(\theta + \eta)}{u^2} - \frac{2B\,v\,d\eta\,\sin.\psi}{u^2},$$

vbi

vbi ob

$$v\,d\eta\,\text{ſin.}\,\psi + dv\,\text{coſ.}\,\psi = du;\ \text{fiet}$$

$$-\frac{2B\,dv\,\text{coſ.}\,\psi}{u^2} - \frac{2B\,v\,d\eta\,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} = -\frac{2B\,du}{u^2};$$

hincque

$$\frac{2dvddv + 2v^2d\eta dd\eta + 2vdvd\eta^2}{d\tau^2} - \frac{2vdvd\Phi^2.\,\text{ſin.}\,\eta^2}{d\tau^2} - \frac{2u^2d\Phi^2d\eta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta}{d\tau^2}$$
$$= -\frac{2A\,dv}{v^2} - \frac{2B\,du}{u^2}.$$

Tum vero ob

$$2v\,\text{ſin.}\,\eta^2 = \frac{2w^4}{v^3\,\text{ſin.}\,\eta^2};\ \text{et}$$
$$2v^2\,\text{ſin.}\,\eta = \frac{2w^4}{v^2\,\text{ſin.}\,\eta^3};\ \text{erit}$$
$$-\frac{d\Phi^2}{d\tau^2}(2v\,d\eta\,\text{ſin.}\,\eta^2 + 2v^2\,d\eta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta)$$
$$= -\frac{w^4\,d\Phi^2}{d\tau^2}\left(\frac{2dv}{v^3\,\text{ſin.}\,\eta^2} + \frac{2d\eta\,\text{coſ.}\,\eta}{v^2\,\text{ſin.}\,\eta^3}\right);$$

cuius integrale ob $\frac{w^4\,d\Phi^2}{d\tau^2}$ conſtans, erit

$$\frac{w^4\,d\Phi^2}{v^2\,d\tau^2\,\text{ſin.}\,\eta^2} = \frac{w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2};$$

ſicque fiet:

$$\frac{dv^2 + v^2\,d\eta^2 + w^2\,d\Phi^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

§. 14. De aequatione (V.) §. 10. inuenta obſeruare iuuat, eam alia quoque ratione ex aequationibus primitiuis §. 3. allatis deduci poſſe. Nimirum prouti ab Illuſtr. *Eulero* demonſtratum eſt, Nou. Com. Tom. XI. erit:

$$\frac{(xdy - ydx)(tdy - ydt) + (xdz - zdx)(tdz - zdt)}{d\tau^2} = a\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right).$$

Et quum ſit $y = w\,\text{coſ.}\,\Phi$; $z = w\,\text{ſin.}\,\Phi$; fiet

$$dy = dw\,\text{coſ.}\,\Phi - w\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi;$$
$$dz = dw\,\text{ſin.}\,\Phi + w\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi;$$

hinc

$$(x\,dy - y\,dx)(t\,dy - y\,dt) + (x\,dz - z\,dx)(t\,dz - z\,dt)$$
$$= xt(dy^2 + dz^2) - (x\,dt + t\,dx)(y\,dy + z\,dz) + (y^2 + z^2)\,dx\,dt$$
$$= xt(dw^2 + w^2 d\Phi^2) - w\,dw\,(x\,dt + t\,dx) + w^2\,dx\,dt\,,$$

quae etiam hac forma repraeſentari poteſt:

$$(x\,dw - w\,dx)(t\,dw - w\,dt) + t\,x\,w^2\,d\Phi^2.$$

Nunc quum ſit:

$d\,w = d\,v$ ſin. η + $v\,d\,\eta$ coſ. η;

$d\,x = d\,v$ coſ. η − $v\,d\,\eta$ ſin. η; erit

$x\,d\,w - w\,d\,x = v^2\,d\,\eta$; ſimilemque ob rationem:

$t\,d\,w - w\,d\,t = u^2\,d\,\theta$; hinc

$(x\,d\,w - w\,d\,x)(t\,d\,w - w\,d\,t) = v^2\,u^2\,d\,\eta\,d\,\theta.$

Vlterius eſt

$$m^2\,a^4 \text{ cot. } \theta \text{ cot. } \eta = \frac{w^4\,d\,\Phi^2 \text{ cot. } \theta \text{ cot. } \eta}{d\,T^2} = \frac{t\,x\,w^2\,d\,\Phi^2}{d\,T^2};$$

ob cot. $\eta = \frac{x}{w}$; cot. $\theta = \frac{t}{w}$. Denique coſ. $\eta = \frac{x}{v}$; coſ. $\theta = \frac{t}{u}$, quamobrem patet iſtam aequationem:

$$\frac{(x\,dw - w\,dx)(t\,dw - w\,dt) + t\,x\,w^2\,d\,\Phi^2}{d\,T^2} = a\left(\frac{A\,x}{v} + \frac{B\,t}{u} + D\right),$$

perfecte coincidere cum illa:

$$\frac{v^2\,u^2\,d\,\eta\,d\,\theta + w^4\,d\,\Phi^2 \text{ cot. } \theta \text{ cot. } \eta}{d\,T^2} = a\,(A \text{ coſ. } \eta + B \text{ coſ. } \theta) + F;$$

poſito nimirum $F = a\,D$. Ideoque hinc concluditur quomodo in ſubſidium vocata hac aequatione (V.) ſi illa combinetur cum aequatione (IV.) modo in §. 11 explicato, ad aequationem (III.) peruenire licet, quae iterum cum aequatione (IV.) combinata Problematis ſolutionem exhibet.

§. 15. Caeterum directe quidem per combinationem aequationum (IV.) et (V.) negotium ſequenti ratione perficitur. Ob coſ. $\psi = \frac{v^2 + u^2 - a^2}{2\,u\,v}$ fiet

$$(v + u)^2 - a^2 = 2\,u\,v\,(1 + \text{coſ. } \psi);$$
$$(v - u)^2 - a^2 = -\,2\,v\,u\,(1 - \text{coſ. } \psi);$$

hinc

hinc aequatio (IV.) ſic exprimetur:

$$\frac{v^2 u^2 (d v + d u)^2}{d \tau^2} - \frac{2 v^2 u^2 d v d u}{d \tau^2} (1 + \text{coſ.} \psi)$$
$$= 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^6;$$

et aequatio (V.) ſequenti ratione:

$$v u d v d u \frac{(1 + \text{coſ.} \psi)}{1 - \text{coſ.} \psi} - v u (d v + d u)^2 \frac{\text{coſ.} \psi}{\text{ſin.} \psi^2}$$
$$= A a \,\text{coſ.}\, \eta + B a \,\text{coſ.}\, \theta - m^2 a^4 \cot. \theta \cot \eta + F;$$

hinc ducta hac aequatione in $2 v u (1 - \text{coſ.} \psi)$ et addito producto ad aequationem (IV.) ob

$\text{ſin.} \psi^2 = (1 + \text{coſ.} \psi) (1 - \text{coſ.} \psi)$ fiet

$$\frac{v^2 u^2 (d v + d u)^2}{d \tau^2} \cdot \frac{1 - \text{coſ.} \psi}{1 + \text{coſ.} \psi} = 2 a^2 w^2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) m^2 a^6$$
$$+ 2 v u (1 - \text{coſ.} \psi) (A a \,\text{coſ.} \eta + B a \,\text{coſ.} \theta - m^2 a^4 \cot. \theta \cot. \eta + F);$$

hincque:

$$\frac{v^2 u^2 (d v + d u)^2}{d \tau^2} = 2 a^2 w^2 \frac{(1 + \text{coſ.} \psi)}{1 - \text{coſ.} \psi} \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right) - m^2 a^6 \frac{(1 + \text{coſ.} \psi)}{1 - \text{coſ.} \psi}$$
$$+ 2 v u (1 + \text{coſ.} \psi) (A a \,\text{coſ.} \eta + B a \,\text{coſ.} \theta - m^2 a^4 \cot. \theta \cot. \eta + F).$$

Pro reductione autem terminorum a dextra parte aequationis notemus eſſe

$$a^2 w^2 \frac{(1 + \text{coſ.} \psi)}{1 - \text{coſ.} \psi} = v^2 u^2 (1 + \text{coſ.} \psi)^2, \text{ ob}$$
$$\text{ſin.} \psi^2 = (1 + \text{coſ.} \psi) (1 - \text{coſ.} \psi);$$

hinc

$$2 a^2 w^2 \frac{(1 + \text{coſ.} \psi)}{1 - \text{coſ.} \psi} \cdot \frac{A}{v} + 2 v u (1 + \text{coſ.} \psi) . A a \,\text{coſ.} \eta$$
$$= 2 v u (1 + \text{coſ.} \psi) (A u (1 + \text{coſ.} \psi) + A a \,\text{coſ.} \eta),$$

et quum ſit $v = u \,\text{coſ.} \psi\, a \,\text{coſ.} \eta$; fiet coefficiens termini A qui eſt

$$\frac{2 a^2 w^2}{v} \frac{(1 + \text{coſ.} \psi)}{1 - \text{coſ.} \psi} + 2 v u (1 + \text{coſ.} \psi) a \,\text{coſ.} \eta$$
$$= 2 v u (1 + \text{coſ.} \psi) (v + u) = (v + u) ((v + u)^2 - a^2).$$

Simili

Simili modo erit coefficiens pro B

$$2\,v\,u\,(1+\text{coſ.}\,\psi)\,(v\,(1+\text{coſ.}\,\psi)+a\,\text{coſ.}\,\theta)$$
$$=2\,v\,u\,(1+\text{coſ.}\,\psi)\,(v+u) \text{ ob}$$
$$v\,\text{coſ.}\,\psi+a\,\text{coſ.}\,\theta=u.$$

Coefficiens ipſius $\frac{C}{2a}$ eſt

$$4\,v^2\,u^2\,(1+\text{coſ.}\,\psi)^2=((v+u)^2-a^2)^2.$$

Denique pro terminis per m^2 multiplicatis, notemus eſſe

$$-m^2\,a^6\,\frac{(1+\text{coſ.}\,\psi)}{1-\text{coſ.}\,\psi}-2\,v\,u\,(1+\text{coſ.}\,\psi)\,m^2\,a^4\,\text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\eta$$
$$=-m^2a^6-m^2a^4\left(\frac{2\,a^2\,\text{coſ.}\,\psi}{1-\text{coſ.}\,\psi}+2vu(1+\text{coſ.}\,\psi)\text{cot.}\,\eta\,\text{cot.}\,\eta\right))$$
$$=-m^2\,a^6-2\,m^2\,a^4\,v\,u\,(1+\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\psi);$$

ob $a^2=\frac{v\,u\,\text{ſin.}\,\psi^2}{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta}$, hinc

$$\frac{a^2\,\text{coſ.}\,\psi}{1-\text{coſ.}\,\psi}=\frac{v\,u\,(1+\text{coſ.}\,\psi)\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta} \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\psi=-\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta+\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta, \text{ vnde}$$
$$\frac{\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta}+\text{cot.}\,\eta\,\text{cot.}\,\theta=1.$$

Termini igitur hinc reſultantes erunt

$$-m^2\,a^6-m^2\,a^4\,((v+u)^2-a^2).$$

Ideoque collectis omnibus terminis haec prodibit aequatio:

$$v^2\,u^2\frac{(d\,v+d\,u)^2}{d\,T^2}=(A+B)\,((v+u)^3-a^2(v+u))+\frac{C}{2a}((v+u)^2-a^2)^2$$
$$+F\,((v+u)^2-a^2)-m^2\,a^4\,((v+u)^2-a^2)-m^2\,a^6$$
$$=(A+B)\,((v+u)^3-a^2\,(v+u))+\frac{C}{2a}\,((v+u)^4-a^4)$$
$$+(F-m^2\,a^4-C\,a)\,((v+u)^2-a^2)-m^2\,a^6.$$

Quae forma cum illa §. 9. inuenta prorſus conſentit, poſito $F-m^2\,a^4-C\,a=D\,a$. Deinde quia aequatio (IV.) ſic exprimi poteſt:

$$v^2\,u^2\,\frac{(dv-du)^2}{d\,T^2}+\frac{[illegible]\,(1-\text{coſ.}\,\psi)}{d\,T^2}=2\,a^3\,[illegible]\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2\,a^6;$$

et

et aequatio (V) iſthac ratione:

$$v\,u\,d\,v\,d\,u\,\frac{(1-\text{coſ.}\,\psi)}{1+\text{coſ.}\,\psi} - v\,u\,\frac{(d\,v - d\,u)^2\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi^2}$$
$$= A\,a\,\text{coſ}\,\eta + B\,a\,\text{coſ.}\,\theta - m^2\,a^4\,\text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\eta + F;$$

multiplicata poſteriori aequatione per $2\,v\,u\,(1+\text{coſ.}\,\psi)$ et ſubtracto producto ab aequatione (IV) habebimus:

$$v^2\,u^2\,\frac{(d\,v - d\,u)^2}{d\,\tau^2}\left(\frac{1+\text{coſ.}\,\psi}{1-\text{coſ.}\,\psi}\right) = 2\,a^2\,w^2\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right) - m^2\,a^6$$
$$-2vu(1+\text{coſ.}\,\psi)(Aa\,\text{coſ.}\,\eta + Ba\,\text{coſ.}\,\theta - m^2a^4\,\text{cot}\,\theta\,\text{cot.}\,\eta + F);$$

hincque

$$v^2u^2\left(\frac{dv-du)^2}{d\tau^2}\right) = 2\,u^2\,w^2\,\frac{(1-\text{coſ.}\,\psi)}{1+\text{coſ.}\,\psi}\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right) - m^2\,a^6\,\frac{(1-\text{coſ.}\,\psi)}{1+\text{coſ.}\,\psi}$$
$$-2vu(1-\text{coſ.}\,\psi)(Aa\,\text{coſ.}\,\eta + Ba\,\text{coſ.}\,\theta - m^2a^4\,\text{cot.}\,\eta\,\text{cot.}\,\theta + F).$$

Vnde per ſimiles reductiones ac ſupra adhibuimus haec elicietur aequatio:

$$v^2u^2\,\frac{(dv-du)^2}{d\,\tau^2} = (A-B)\,((v-u)^3 - a^2\,(v-u)) + \frac{C}{2\,a}\,((v-u)^4 - a^4)$$
$$+ D\,a\,((v-u)^2 - a^2) - m^2\,a^6;$$

poſito $D\,a = F\,m^2\,a^4 - C\,a$.

§. 16. De ratione inueniendi aequationem noſtram (IV.) etiam id notaſſe conuenit, quod ex aequationibus §. 5. allatis

$$\frac{d\,d\,v - v\,(d\,\eta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{A}{v^2} + \frac{B\,\text{coſ.}\,(\theta+\eta)}{u^2};$$
$$\frac{d\,d\,u - u\,(d\,\theta^2 + d\,\Phi^2\,\text{ſin.}\,\theta^2)}{d\,\tau^2} = -\frac{B}{u^2} + \frac{A\,\text{coſ.}\,(\theta+\eta)}{v^2};$$

per integrationem ſequentem in modum eliciantur. Multiplicetur prior harum aequationum per $\frac{dv - du\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi^2}$, et poſterior per $\frac{du - dv\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi^2}$, et productorum ſumma addatur, quo pacto orietur:

$$\frac{ddv(dv-du\cos.\psi)+ddu(du-dv\cos.\psi)}{d\tau^2\,.\sin.\psi^2}-\frac{(vdv-vdu\cos.\psi)(d\eta^2+d\Phi^2\sin.\eta^2)}{d\tau^2\,.\sin.\psi^2}$$
$$-\frac{(udu-udv\cos.\psi)(d\theta^2+d\Phi^2\sin.\theta^2)}{d\tau^2\,.\sin.\psi^2}=-\frac{A(dv-du\cos.\psi)}{v^2\,.\sin.\psi^2}$$
$$-\frac{A\cos.\psi(du-dv\cos.\psi)}{v^2\,.\sin.\psi^2}-\frac{B(du-dv\cos.\psi)}{u^2\,.\sin.\psi^2}$$
$$-\frac{B\cos.\psi(dv-du\cos.\psi)}{u\sin.\psi^2}=-\frac{A\,dv}{v^2}-\frac{B\,du}{u^2}.$$

Atqui eſt $v\,d\eta=\frac{du-dv\cos.\psi}{\sin.\psi}$ (§. 6.) et $u\,d\theta=\frac{dv-du\cos.\psi}{\sin.\psi}$; hinc bina iſta membra

$$\frac{v(dv-du\cos.\psi)d\eta^2-u(du-dv\cos.\psi)d\theta^2}{d\tau^2\,.\sin.\psi^2}=-\frac{(dv-du\cos.\psi)(du-dv\cos.\psi)(d\eta+d\theta)}{d\tau^2\,.\sin.\psi^3}$$
$$=+\frac{d\psi(dv-du\cos.\psi)(du-dv\cos.\psi)}{d\tau^2\,.\sin.\psi^3}.$$

Tum vero termini per $d\Phi^2$ affecti ita redigentur:

$$-v(dv-du\cos.\psi)\frac{\sin.\eta^2}{\sin.\psi^2}-u(du-dv\cos.\psi)\frac{\sin.\theta^2}{\sin.\psi^2}$$
$$=-w(dv-du\cos.\psi)\frac{\sin.\eta}{\sin.\psi^2}-w(du-dv\cos.\psi)\frac{\sin.\theta}{\sin.\psi^2}$$
$$=-w\,dv\frac{(\sin.\eta-\sin.\theta\cos.\psi)}{\sin.\psi^2}-w\,du\frac{(\sin.\theta-\sin.\eta\cos.\psi)}{\sin.\psi^2}$$
$$=-w\,dv\frac{\cos.\theta}{\sin.\psi}-\frac{w\,dv\cos.\eta}{\sin.\psi};$$

atque ob

$$dw=dv\sin.\eta+v\,d\eta\cos.\eta;\ \text{et}$$
$$v\,d\eta=\frac{du-dv\cos.\psi}{\sin.\psi}\ \text{fiet}$$
$$dw=dv\sin.\eta+\frac{\cos.\eta(du-dv\cos.\psi)}{\sin.\psi}=\frac{dv\cos.\theta+du\cos.\eta}{\sin.\psi};$$

hincque bina membra per $d\Phi^2$ affecta ita exprimentur:

$$-v(dv-du\cos.\psi)\frac{\sin.\Phi^2.\sin.\eta^2}{d\tau^2.\sin.\psi^2}-u(du-dv\cos.\psi)\frac{d\Phi^2\sin.\theta^2}{d\tau^2\sin.\psi^2}$$
$$=-w\,dw\frac{d\Phi^2}{d\tau^2}=-\frac{w^4\,d\Phi^2\,dw}{w^3\,d\tau^2}.$$

Sicque omnibus terminis collectis habebimus:

$$\frac{ddv(dv-du\cos.\psi)+ddu(dv-du\cos.\psi)}{d\tau^2\,.\sin.\psi^2}+\frac{d\psi(dv-du\cos.\psi)(du-dv\cos.\psi)}{d\tau^2\,.\sin.\psi^2}$$
$$-\frac{w^4\,d\Phi^2\,dw}{w^3\,.\,d\tau^2}=-\frac{A\,dv}{v^2}-\frac{B\,du}{u^2},$$

cuius

cuius integrale erit

$$\frac{dv^2 - 2\,dv\,du\,\text{coſ.}\,\psi + du^2}{d\,\tau^2\,.\,\text{ſin.}\,\psi^2} + \frac{w^2\,d\,\Phi^2}{d\,\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right),$$

et multiplicando per $w^2 = \frac{v^2\,u^2\,\text{ſin.}\,\psi^2}{a^2}$, conſequemur vti §. 6.

$$\frac{v^2\,u^2}{a^2}\,.\,\frac{(dv^2 - 2\,dv\,du\,\text{coſ.}\,\psi - du^2)}{d\,\tau^2\,.\,\text{ſin.}\,\psi^2} - m^2 a^4 = 2\,w^2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Praeterea quum ſit

$$du = v\,d\eta\ \text{ſin.}\ \psi + dv\ \text{coſ.}\ \psi;$$
$$dv = u\,d\theta\ \text{ſin.}\ \psi + du\ \text{coſ.}\ \psi;$$

hinc colligitur

$$dv = \frac{u\,d\theta + v\,d\eta\ \text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi};$$
$$du = \frac{v\,d\eta + u\,d\theta\ \text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi};$$

et quum ſit,

$$dw = dv\ \text{ſin.}\ \eta + v\,d\eta\ \text{coſ.}\ \eta;$$

ſubſtituto pro dv ſin. η eius valore fiet

$$dw = \frac{u\,d\theta\ \text{ſin.}\,\eta + v\,d\eta\ \text{ſin.}\,\eta\ \text{coſ.}\,\psi + v\,d\eta\ \text{coſ.}\,\eta\ \text{ſin.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi} = \frac{u\,d\theta\ \text{ſin.}\,\eta + v\,d\eta\ \text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\psi}$$
$$= \frac{u^2\,d\theta + v^2\,d\eta}{a},\ \text{ſiue}$$
$$a\,dw = u^2\,d\theta + v^2\,d\eta;$$

quae eſt proprietas elegans, quae omnino commemorari meretur.

§. 17. Ex iſtis quae nunc docuimus oppido liquet inſignem varietatem ſolutionum adornari poſſe, prouti ſcilicet aequationum integralium ſupra inuentarum aliae atque aliae inter ſe combinentur. Sic ſi ratio habeatur aequationum differentialium (III.), (IV.), (V.), tres ſpecies ſolutionum oriuntur, prouti binae quaeuis harum aequationum inter ſe combinentur, vbi quidem combinatio aequationum

(IV.) et (V.), quoad fundamentum, conuenit cum ſolutione ab Illuſtr. *Eulero* data, combinatio vero aequationum (III.) et (IV.) noſtram illam ſolutionem ſiſtit, quam ſupra §§. 7. 9 expoſuimus. Deinde ſi aequatio (V.) ratione §. 8. expoſita denuo combinetur cum aequationibus differentialibus ſecundi gradus (I.), (II.), inde perueniemus ad aequationes differentiales iterum integrabiles, et quorum integralia ipſas concluſiones finales Problematis ſiſtunt. Vtcunque autem egregium ſit hoc artificium Analyticum ab Illuſtr. *de la Grange* propoſitum, tamen, vti ſupra monui, ſuperfluum iudicare poſſet ad nouas has integrationes recurrere, ſiquidem combinatio aequationum (III.), (IV.) vel (IV.), (V.) ad easdem aequationes finales, absque vlla noua integratione, perducit, niſi quod vſus adhibeatur aequationis $\frac{w^4\, d\,\Phi^2}{d\,\tau^2} = m^2 a^4$, cuius inuentio prorſus eſt obuia. Praeterea quum ſit

$$v = \frac{a\ \text{ſin.}\ \theta}{\text{ſin.}\ \psi};$$

$$u = \frac{a\ \text{ſin.}\ \eta}{\text{ſin.}\ \psi};$$

$$v + u = a\,\frac{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}(\theta - \eta)}{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}(\theta + \eta)};$$

$$v - u = a\,\frac{\text{ſin.}\ \frac{1}{2}(\theta - \eta)}{\text{ſin.}\ \frac{1}{2}(\theta + \eta)};$$

patet omnino quomodo non ſolum aequationes (III.), (IV.), (V.) per ſolos angulos η, θ exprimantur, ſed etiam ipſae aequationes vltimae per hos angulos exponi queant; cui tamen rei vlterius explicandae non eſt vt immoremur.

§. 18. Praeter ſolutiones iam commemoratas, nouae cuiusdam mentionem inieciſſe haud pigebit, qua locus

cus puncti C refertur ad punctum E in recta A B ab A et B aequidiſtans. Ducatur nimirum recta C E, eaque per p indigitata, dicatur $EU = q$, angulusque $CEU = \zeta$, erit $AU = x = b + q$; $BU = t = b - q$; poſito $2b = a$. Hinc fiet $ddx = ddq$, et aequationes differentiales nunc erunt:

$$\frac{ddq}{d\tau^2} = -\frac{A(b+q)}{v^3} + \frac{B(b-q)}{u^3};$$

$$\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3};$$

$$\frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Az}{v^3} - \frac{Bz}{u^3}.$$

Tum vero ob

$$MC = ME \sin. MEU;$$

$$w = p \sin.\zeta;$$

$$y = w \cos.\Phi = q \sin.\zeta \cos.\Phi;$$

$$z = w \sin.\Phi = p \sin.\zeta \sin.\Phi;$$

$q = p \cos.\zeta$; erit:

$$dq = dp \cos.\zeta - p\,d\zeta \sin.\zeta;$$

$$ddq = ddp \cos.\zeta - 2dp\,d\zeta \sin.\zeta - p\,dd\zeta \sin.\zeta - p\,d\zeta^2 \cos.\zeta;$$

$$ddy = ddw \cos.\Phi - 2dw\,d\Phi \sin.\Phi - w\,dd\Phi \sin.\Phi - w\,d\Phi^2 \cos.\Phi;$$

$$ddz = ddw \sin.\Phi + 2dw\,d\Phi \cos.\Phi + w\,dd\Phi \cos.\Phi - w\,d\Phi^2 \sin.\Phi.$$

Hinc conſequemur:

$ddy \cos.\Phi + ddz \sin.\Phi = ddw - w\,d\Phi^2$; et ob

$$ddw = ddp \sin\zeta + 2dp\,d\zeta \cos.\zeta + p\,dd\zeta \cos.\zeta - p\,d\zeta^2 \sin.\zeta;$$

fiet

$$\begin{aligned} & ddq \cos.\zeta + ddy \sin.\zeta \cos.\Phi + ddz \sin.\zeta \sin.\Phi \\ & = ddp \cos.\zeta^2 - 2dp\,d\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta + p\,dd\zeta \sin\zeta \cos.\zeta \\ & - p\,d\zeta^2 \cos.\zeta^2 + ddp \sin.\zeta^2 + 2\,dp\,d\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta \\ & + p\,dd\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta - p\,d\zeta^2 \sin.\zeta^2 - p\,d\Phi^2 \sin.\zeta^2; \end{aligned}$$

 hinc

hincque obtinebimus iſtam aequationem differentio-differentialem:

$$\frac{ddp - p(d\zeta^2 + d\Phi^2 \,ſin.\,\zeta^2)}{d\,T^2} = -\frac{A(b\,coſ.\,\zeta + p)}{v^3} + \frac{B(b\,coſ.\,\zeta - p)}{u^3}.$$

§. 19. Nunc ſi denuo haec fiat combinatio:

$$ddq\,ſin.\,\zeta - ddy\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\Phi - ddz\,coſ.\,\zeta\,ſin.\,\Phi;$$

conſequemur pro iſta expreſſione:

$$\begin{aligned} ddp\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta - 2dp\,d\zeta\,ſin.\,\zeta^2 - pdd\zeta\,ſin.\,\zeta^2 - pd\zeta^2\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta \\ - ddp\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta - 2\,dp\,d\zeta\,coſ.\,\zeta^2 - pdd\zeta^2\,coſ.\,\zeta^2 \\ + p\,d\zeta^2\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta + p\,d\Phi^2\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta \\ = -2\,dp\,d\zeta - pdd\zeta + pd\Phi^2\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta; \end{aligned}$$

vnde hanc obtinemus aequationem differentio-differentialem:

$$\frac{pdd\zeta + 2dp\,d\zeta - pd\Phi^2\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta}{d\,T^2} = b\,ſin.\,\zeta\left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right).$$

Tum vero quia eſt

$$dy^2 + dz^2 = dw^2 + w^2\,d\Phi^2; \text{ erit}$$

$$\begin{aligned} dq^2 + dy^2 + dz^2 &= dq^2 + dw^2 + w^2\,d\Phi^2 \\ &= dp^2 + p^2\,d\zeta^2 + w^2\,d\Phi^2, \end{aligned}$$

ideoque ob

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\,T^2} = \frac{dq^2 + dy^2 + dz^2}{d\,T^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right); \text{ fiet}$$

$$\frac{dp^2 + p^2\,d\zeta^2 + w^2\,d\Phi^2}{d\,T^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Hinc ſi aequatio differentio-differentialis §. ſuperiori inventa per p multiplicetur et ad productum aequatio vltimo loco inuenta addatur, iſta prodibit aequatio:

$$\frac{pddp + dp^2}{d\,T^2} = -A\,p\,\frac{(b\,coſ.\,\zeta + p)}{v^3} + B\,p\,\frac{(b\,coſ.\,\zeta - p)}{u^3} + 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Cae-

Caeterum quum ſit

$$d v = \frac{d p (p + b \cos. \zeta)}{v} - \frac{b p d \zeta \sin. \zeta}{v} \text{ et}$$
$$d u = \frac{d p (p - b \cos. \zeta)}{2 u} + \frac{b p d \zeta \sin. \zeta}{u};$$

ſi aequatio differentialis:

$$\frac{d d p - p(d \zeta^2 + d \Phi^2 \sin. \zeta^2)}{d \tau^2} = - \frac{A(p + b \cos. \zeta)}{v^3} - \frac{B(p - b \cos. \zeta)}{u^3};$$

multiplicetur per $2 dp$, habebimus ſequentem aequationem:

$$\frac{2 d p d d p - 2 p d p (d \zeta^2 + d \Phi^2 \sin. \zeta^2)}{d \tau^2} = - \frac{2 A d p (p + b \cos. \zeta)}{v^3}$$
$$- \frac{2 B d p (p - b \cos. \zeta)}{u^3}.$$

Tumque ſi aequatio differentialis:

$$\frac{p d d \zeta + 2 d p d \zeta - p d \Phi^2 \sin. \zeta \cos. \zeta}{d \tau^2} = b \sin. \zeta \left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right);$$

multiplicetur per $2 p d \zeta$, conſequemur:

$$+ \frac{2 p^2 d \zeta d d \zeta + 4 p d p d \zeta^2 - 2 p^2 d \Phi^2 d \zeta \sin. \zeta \cos. \zeta}{d \tau^2} = 2 b p d \zeta \sin. \zeta \left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right),$$

et his aequationibus inuicem additis prodibit:

$$\frac{2 d p d d p + 2 p^2 d \zeta d d \zeta + 2 p d p d \zeta^2 - 2 p d p d \Phi^2 \sin. \zeta^2 - 2 p^2 d \Phi^2 d \zeta \sin. \zeta \cos. \zeta}{d \tau^2}$$
$$= - \frac{2 A d p}{v^3}(p + b \cos. \zeta) + \frac{2 A b p d \zeta \sin. \zeta}{v^3} - \frac{2 B d p}{u^3}(p - b \cos. \zeta)$$
$$- \frac{2 B b p d \zeta \sin. \zeta}{u^3} = - \frac{2 A d v}{v^2} - \frac{2 B d u}{u^2},$$

ideoque huius aequationis integrale habebitur:

$$(M) \quad \frac{d p^2 + p^2 d \zeta^2 + w^2 d \Phi^2}{d \tau^2} = 2 \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

Nam ob

$$- \frac{2 p d p d \Phi^2 \sin. \zeta^2 - 2 p^2 d \Phi^2 d \zeta \sin. \zeta \cos. \zeta}{d \tau^2} = - \frac{w^4 d \Phi^2}{d \tau^2} \left(\frac{d p}{p^3 \sin. \zeta^2} + \frac{d \zeta \cos. \zeta}{p^2 \sin. \zeta^3}\right)$$

ob $\frac{w^4 d \Phi^2}{d \tau^2}$ conſtans, integrale horum terminorum erit

$$\frac{w^4 d \Phi^2}{p^2 d \tau^2 . \sin. \zeta^2} = \frac{w^2 d \Phi^2}{d \tau^2}.$$

§. 20.

§. 20. Quemadmodum per datam rectam E C et angulum C E U determinatur recta E U, ita quoque viciſſim ex datis E C et E U determinatur angulus C E U, vnde pro noſtro inſtituto etiam vſum facere licebit harum aequationum differentialium:

$$\frac{p\,ddp + dp^2}{d\tau^2} = -\frac{\mathrm{A}p(p^2+bq)}{v^3} - \frac{\mathrm{B}(p^2-bq)}{u^3} + 2\left(\frac{\mathrm{A}}{v} + \frac{\mathrm{B}}{u} + \frac{\mathrm{C}}{a}\right);$$

$$\frac{ddq}{d\tau^2} = -\frac{\mathrm{A}(b+q)}{v^3} + \frac{\mathrm{B}(b-q)}{u^3};$$

multiplicata priorum harum aequationum per $2\,p\,dp$; poſteriori per $2\,b^2\,dq$, et ſubſtractis poſteriori producto a priori conſequemur:

$$\frac{2p^2\,dp\,ddp + 2p\,dp^3 - 2b^2\,dq\,ddq}{d\tau^2} = -\frac{2\mathrm{A}p\,dp(p^2+bq)}{v^3} - \frac{2\mathrm{B}p\,dp(p^2-bq)}{u^3}$$
$$+\frac{2\mathrm{A}b^2\,dq(b+q)}{v^3} - \frac{2\mathrm{B}b^2\,dq(b-q)}{u^3} + 4p\,dp\left(\frac{\mathrm{A}}{v} + \frac{\mathrm{B}}{u} + \frac{\mathrm{C}}{a}\right);$$

cuius integrale eſt:

$$(\mathrm{N})\ \frac{p^2\,dp^2 - b^2\,dq^2}{d\tau^2} = \frac{2\mathrm{A}}{v}(p^2+bq) + \frac{2\mathrm{B}}{u}(p^2-bq)$$
$$+\frac{2\mathrm{C}}{a}(p^2+b^2) + 2b\mathrm{D},\ \text{ob}$$
$$dv = \frac{p\,dp + b\,dq}{v} \ \text{et}\ du = \frac{p\,dp - b\,dq}{u}.$$

Sicque iam binas nacti ſumus aequationes differentiales primi gradus (M), (N) per differentialia dp, dq vel $d\zeta$ expreſſas, ex quibus Problematis ſolutio nunc adornari poterit.

§. 21. Quia eſt coſ. $\zeta = \frac{q}{p}$; fiet

$$d\zeta.\ \text{ſin.}\,\zeta = \frac{p\,dq - q\,dp}{p^2} \ \text{et}$$

$$p^2\,d\zeta^2 = \frac{p^2\,dq^2 - 2pq\,dp\,dq + q^2\,dp^2}{p^2\ \text{ſin.}\,\zeta^2} = \frac{p^2\,dq^2 - 2pq\,dp\,dq + q^2\,dp^2}{w^2}$$

ob $w^2 = p^2\ \text{ſin.}\,\zeta^2 = p^2 - q^2$. Nunc multiplicetur aequatio (M) per $p^2 - q^2$, et prodibit

$(p^2 -$

$$\frac{(p^2-q^2)dp^2+p^2dq^2-2pqdpdq+q^2dp^2+v^4d\Phi^2}{dt^2}$$
$$=2(p^2-q^2)\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right);$$

quae ad hanc formam reducitur:

$$\frac{p^2dp^2+p^2dq^2-2pqdpdq}{d\tau^2}=2(p^2-q^2)\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-m^2u^4.\ (\mathrm{M});$$

ab hac aequatione ſubtrahatur aequatio (N) eritque:

$$\frac{(p^2+b^2)dq^2-2pqdpdq}{d\tau^2}=-\frac{2A}{v}(bq+q^2)$$
$$-\frac{2B}{u}(q^2-bq)-\frac{2C}{a}(b^2+q^2)-2b\mathrm{D}-m^2a^4\ (\mathrm{O}).$$

Iam quia eſt

$$v^2=p^2+2bq+b^2;\ u^2=p^2-2bq+b^2;$$

conſequimur

$$v^2+u^2=2(p^2+b^2);\ v^2-u^2=4bq;$$

tumque ob

$$vdv=pdp+bdq;\ udu=pdp-bdq \text{ erit}$$
$$vudvdu=p^2dp^2-b^2dq^2, \text{ et}$$
$$v^2u^2dvdu=vu(p^2dp^2-b^2dq^2);$$
$$v^2u^2(dv^2+du^2)=(v^2+u^2)(p^2dp^2+b^2dq^2)-2(v^2-u^2)bpdpdq$$
$$=2(p^2+b^2)(p^2dp^2+b^2dq^2)+8b^2pqdpdq$$
$$=2(p^2+b^2)(p^2dp^2-b^2dq^2)+4(p^2+b^2)b^2dq^2$$
$$-8b^2pqdpdq.$$

Hinc igitur elicitur:

$$\frac{v^2u^2dvdu}{d\tau^2}=\frac{vu(p^2dp^2-b^2dq^2)}{d\tau^2}=2\mathrm{A}u(p^2+bq)+2\mathrm{B}v(p^2-bq)$$
$$+\frac{2Cvu}{a}(p^2+b^2)+2b\mathrm{D}vu;$$
$$\frac{v^2u^2(dv^2+du^2)}{d\tau^2}=\frac{2(p^2+b^2)(p^2dp^2-b^2dq^2)}{d\tau^2}+\frac{4(p^2+b^2)b^2dq^2-8b^2pqdpdq}{d\tau^2}$$
$$=\frac{4A}{v}(p^2+bq)(p^2+b^2)+\frac{4B}{u}(p^2-bq)(p^2+b^2)$$

$$+\frac{4C}{a}(p^2+b^2)^2+4bD(p^2+b^2)$$
$$-\frac{8Ab^2}{v}(bq+q^2)-\frac{8Bb^2}{u}(q^2-bq)$$
$$-\frac{8Cb^2}{a}(b^2+q^2)-8b^3D-4m^2a^4b^2,$$

per aequationes (N), (O), multiplicando priorem per (p^2+b^2), poſteriorem per $4b^2$. Hinc ob

$$p^2+bq=v^2-b^2-bq=\frac{3v^2-4b^2+u^2}{4}=\frac{v^2+u^2-a^2}{4}+\frac{v^2}{2};$$

ſimilique modo

$$p^2-bq=\frac{v^2+u^2-a^2}{4}+\frac{u^2}{2},$$

obtinebimus:

$$\frac{2v^2u^2dvdu}{d\tau^2}=2vu(Av+Bu)+(Au+Bv)(v^2+u^2-a^2)$$
$$+\frac{2Cvu}{a}(v^2+u^2)+2Davu.$$

Tum ob

$$\frac{4}{v}(p^2+bq)(p^2+b^2)=\frac{(v^2+u^2)}{2v}(v^2+u^2-a^2+2v^2);\text{ et}$$
$$-\frac{8b^2}{v}(bq+q^2)=-\frac{2b^2}{v}(v^2-u^2)-\frac{(v^2-u^2)^4}{2v}$$
$$=+\frac{(v^2-u^2)}{2v}(v^2+u^2-a^2-2v^2);$$

hincque ſumtis his terminis collectim, prodibit iſte

$$Av(v^2+u^2-a^2)+2Avu^2;$$

ſimilique modo termini pro B erunt

$$Bu(v^2+u^2-a^2)+2Buv^2;$$

termini autem pro C erunt

$$\frac{C}{2a}(2(v^2+u^2)^2-(v^2-u^2)^2-a^4)=\frac{C}{2a}(v^4+6v^2u^2+u^4-a^4);$$

pro D habebimus $aD(v^2+u^2-a^2)$ et denique $4m^2a^4b^2 = m^2a^6$; ideoque erit prorſus vt ſupra §. 7:

$$\frac{v^2u^2(dv+du)^2}{d\tau^2}=(Av+Bu)(v^2+u^2-a^2)+2vu(Au+Bv)$$
$$+\frac{C}{2a}(v^4+u^4+6v^2u^2-a^4)+Da(v^2+u^2-a^2)-m^2a^6.$$

Ideo-

Ideoque ratione ibi expoſita tandem elicientur aequationes vltimae, quae rationem differentialium dr^2, ds^2 exhibent.

§. 22. Quum ſit

$$\frac{ddy\,\text{coſ.}\,\Phi + ddz\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\tau^2} = \frac{ddw - wd\Phi^2}{d\tau^2}$$

hinc obtinebimus:

$$\frac{ddw - wd\Phi^2}{d\tau^2} = -\frac{Aw}{v^3} - \frac{Bw}{u^3} = -\frac{Ap\,\text{ſin.}\,\zeta}{v^3} - \frac{Bp\,\text{ſin.}\,\zeta}{u^3};$$

Iam ſi haec aequatio multiplicetur per

$$2b^2dw = 2b^2(dp\,\text{ſin.}\,\zeta + pd\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta),$$

tumque aequatio differentialis:

$$\frac{pdd\zeta + 2dpd\zeta - pd\Phi^2\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta}{d\tau^2} = b\,\text{ſin.}\,\zeta\left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right);$$

multiplicetur per $2p^3d\zeta$, et poſterius productum a priori ſubtrahatur, conſequemur hanc aequationem differentio-differentialem:

$$\frac{2b^2dwddw - 2b^2wdwd\Phi^2}{d\tau^2} - \frac{2p^2d\zeta(p^3dd\zeta + 2pdpd\zeta) + 2p^4d\Phi^2d\zeta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta}{d\tau^2}$$
$$= -2b^2p\,\text{ſin.}\,\zeta\left(\frac{A}{v^3} + \frac{B}{u^3}\right)(dp\,\text{ſin.}\,\zeta + pd\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta)$$
$$-2bp^3d\zeta\,\text{ſin.}\,\zeta\left(\frac{A}{v^3} - \frac{B}{u^3}\right);$$

cuius integrale erit:

$$\frac{b^2dw^2 - p^4d\zeta^2 + (b^2 - p^2)w^2d\Phi^2}{d\tau^2} = a\left(\frac{A(b + p\,\text{coſ.}\,\zeta)}{v} + \frac{B(b - p\,\text{coſ.}\,\zeta)}{u} + D\right).$$

Quae aequatio integralis etiam ex iſta:

$$\frac{(xdw - wdx)(tdw - wdt) + txw^2d\Phi^2}{d\tau^2} = a\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right)$$

facile deriuari poteſt, modo nimirum loco termini

$$(b^2 - p^2)\frac{w^2d\Phi^2}{d\tau^2} \text{ adhibeatur } (b^2 - p^2\,\text{coſ.}\,\zeta^2)\frac{w^2d\Phi^2}{d\tau^2},$$

quippe quum

$$\frac{p^2w^4d\Phi^2}{d\tau^2} = \frac{w^4d\Phi^2}{d\tau^2} + p^2\,\text{coſ.}\,\zeta^2.\frac{w^2d\Phi^2}{d\tau^2},$$

vbi prior terminus conſtans eſt, ideoque in conſtanti a D iam comprehendi intelligitur. Tum quoque per combinationem aequationum (M), (N) haec aequatio integralis facile elicitur, nec heic vlterius explicare neceſſum eſt.

§. 23. Si ſimplicitatis cauſſa ſtatuatur:

$$\sqrt{((A+B)(r^3-r)+\tfrac{1}{2}C(r^4-1)+D(r^2-1)-m^2a^3)}=R;\ \text{et}$$

$$\sqrt{((A-B)(s^3-s)+\tfrac{1}{2}C(s^4-1)+D(s^2-1)-m^2a^3)}=S;$$

obtinemus

$$d\tau=\frac{v\cdot u}{\sqrt{a}}\cdot\frac{dr}{R}=\frac{vu}{\sqrt{a}}\cdot\frac{ds}{S},$$

vnde quum ſit $vu=\frac{1}{4}a^2(r^2-s^2)$, fiet

$$d\tau=\tfrac{1}{4}a\sqrt{a}.\frac{dr(r^2-s^2)}{R}=\tfrac{1}{4}a\sqrt{a}\left(\frac{r^2dr}{R}-\frac{s^2ds}{S}\right).$$

Tum vero quia eſt:

$$4a^2w^2=(v+u+a)(v+u-a)(v-u+a)(u-v+a),$$

fiet

$$4w^2=a^2(r+1)(r-1)(1+s\ (1-s)=(r^2-1)(1-s^2),$$

et quum ſit $d\Phi=\frac{ma^2d\tau}{w^2}$, obtinebimus

$$d\Phi=\frac{4md\tau}{(r^2-1)(s^2-1)}=ma\sqrt{a}\frac{dr(r^2-s^2)}{(r^2-1)(1-s^2)R}$$

$$=ma\sqrt{a}\left(\frac{dr}{(r^2-1)R}-\frac{ds}{(s^2-1)S}\right).$$

Sicque his formulis adhibitis omnia quae ad Problematis ſolutionem deſiderantur perfecta ſunt abſoluta.

§. 24. Si fuerit angulus $\Phi=0$, id eſt ſi motus corporis conſtanter fiat in eodem plano per centra virium A, B transeunte, erit $m=0$, ideoque aequatio finalis huiusmodi obtinebit formam:

$$\frac{dr^2(s^2-1)}{ds^2(r^2-1)}=\frac{(A+B)r+\tfrac{1}{2}C(r^2+1)+D}{(A-B)s+\tfrac{1}{2}C(s^2+1)+D};$$

quae

quae ſi loco r ſubſtituatur $\frac{1+p}{1-p}$, loco s vero $\frac{1-q}{1+q}$, in hanc transformabitur:

$$-\frac{q\,dp^2}{p\,dq^2} = \frac{(A+B)(1-p^2)+C(1+p^2)+D(1-p)^2}{(A-B)(1-q^2)+C(1+q^2)+D(1+q)^2},$$

Tum vero poſito $p = x^2$; $q = y^2$; (vbi probe obſeruandum haec x, y, p, q, non cum illis eſſe confundenda quae ſupra adhibuimus) ſequens emerget aequatio:

$$-\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{(A+B)(1-x^4)+C(1+x^4)+D(1-x^2)^2}{(A-B)(1-y^4)+C(1+y^4)+D(1+y^2)^2},$$

vnde ſi ſtatuatur $C + D = F$, fiet

$$-\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{A+B+F-2Dx^2-(A+B-F)x^4}{A-B+F+2Dy^2-(A-B-F)y^4}; \text{ vnde}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+B+F-2Dx^2-(A+B-F)x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(-A+B-F-2Dy^2+(A-B-F)y^4}}.$$

Quum vero heic ſuppoſuerimus $p = x^2$; $q = y^2$; qua ſuppoſitione vti non licet niſi p, q omni caſu valores conſequantur poſitiuos, igitur perpendendum eſt eſſe: $p = \frac{r-1}{r+1} = \frac{v+u-a}{v+u+a}$, vbi ob fractionis tam numeratorem quam denominatorem poſitiuum (ſiquidem in triangulo bina latera tertio maiora) ſequitur eſſe p poſitiuum. Deinde quum $q = \frac{1-s}{1+s} = \frac{a+u-v}{a+v-u}$, patet quoque eſſe q poſitiuum.

§. 25. Pro caſu quo curua a corpore deſcripta in eodem plano per bina centra virium tranſeunte iacet, elegans ſatis inuenitur formula pro radio curuaturae huius lineae. Nam ſi elementum curuae deſignetur per ds, et natura curvae ſupponatur expreſſa per relationem inter differentialia dv, $d\eta$, nec non functiones lineae v et anguli η, pro radio curuaturae huiusmodi prodibit formula:

$$R = \frac{ds^3}{d\eta(ds^2+dv^2)+v(dv\,dd\eta-d\eta\,ddv)}$$

Quodſi nunc in ſubſidium vocentur aequationes differentio-differentiales §. §. 4. et 10. alla ae, praetermiſſis terminis

 quae

quae $d\Phi$ inuoluunt, erit

$$\frac{v\,dv\,dd\eta + 2\,dv^2\,d\eta}{d\tau^2} = -\frac{B\,dv\,\text{ſin.}\,\psi}{u^2}$$

$$\frac{v\,d\eta\,ddv - v^2\,d\eta^3}{d\tau^2} = -\frac{A\,d\eta}{v} - \frac{B\,v\,d\eta\,\text{Coſ}\,\psi}{u^2};$$ hincque

$$\frac{v(dv\,dd\eta - d\eta\,ddv) + d\eta(dv^2 + ds^2)}{d\tau^2} = +\frac{A\,d\eta}{v}$$
$$- \frac{B\,dv\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi}{u^2} + \frac{B\,v\,d\eta\,\text{coſ.}\,\psi}{u^2}$$

et quum inuenerimus: $u\,d\theta = dv.\,\text{ſin.}\,\psi - v\,d\eta\,\text{coſ.}\,\psi$, §. 16. conſequimur:

$$\frac{v(dv\,dd\eta - d\eta\,ddv) + d\eta(dv^2 + ds^2)}{d\tau^2} = \frac{A\,d\eta}{v} - \frac{B\,d\theta}{u}.$$

Tum vero erit:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{dv^2 + v^2\,d\eta^2}{d\tau^2} = 2\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right);$$

vnde haec prodibit aequatio:

$$R\left(\frac{A\,d\eta}{v} - \frac{B\,d\theta}{u}\right) = 2\,ds\left(\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}\right).$$

§. 26. De formula differentiali:

$$\frac{dr}{\sqrt{((A+B)(r^3 - r) + \tfrac{1}{2}C(r^4 - 1) + D(r^2 - 1) - m^2 a^3}}$$

ab Illuſtr. *Eulero* iam dudum demonſtratum eſt, eiusdem integrationem ad rectificationem ſectionum conicarum reduci; verum hinc quidem parum ſubſidii adfertur pro inueſtiganda aequatione inter r et s, tumque praeſertim ineptum foret ad hanc rectificationem recurrere, quando inter r et s aequatio algebraica locum habet, cuiusmodi caſus ſtatim obuius eſt ille, quo altervtrum ipſorum A, B euaneſcit; quippe quum conſtet curuam hoc caſu deſcriptam eſſe ſectionem Conicam vel per ſectiones Conicas conſtrui poſſe. Verum quae vlterius de determinatione Problematis ex formulis iſtis differentialibus §. 7. allatis, monenda ſunt, alia occaſione vlterius exponere conſtitui.

PHY-

PHYSICA.

DE TRACTATIONE METALLORVM CVM SVLPHVRE.

Auctore
N. SOCOLOFF.

I.

Metalla vario a variis Authoribus cum Sulphure tractata fuerunt modo. Alii pro Caemento metallorum, alii pro menſtruo eorum adhibuerunt ſulphur. Pauci ſunt, qui vires ſulphuris in metalla fuſa examinarunt. Neminem autem noui, qui inſignium mutationum, quae inde accidunt metallis, atque ſingularium Phaenomenorum tum apparentium rite determinarit rationes, et quamnam vtilitatem phyſicam inde liceat expectare, demonſtrarit. Rem igitur a paucis tentatam his pagellis exponendam curabo, ſperans, officium me aliquod phyſicis eo praeſtare poſſe.

II. Ac primo quidem de ferro agam. Obſeruatum eſt, ferrum limatum cum puluere ſulphuris et pauca aqua in paſtam efformatum, repoſitum ſub terra paucis poſt diebus calorem intrinſecum concipere, atque flammam

et maximam fluidi cuiusdam elaſtici haud coercibilis quantitatem generare, quod expandens ſe magnum in volumen, ſuperiacentem terram vel disiicit quaqua verſum, vel ſi concreti firmitas pondusque terrae vi eius reſiſtere valent, eleuare ſaltem eam nititur in collem, vsque dum impetum ſuum deponat. Singulare hoc phoenomenon cernentes eruditi, montium ortus, ſiue eleuationem terrae a centro ad periphacriam hac ex cauſa explicare ceperunt. Recentioris aeui Phyſici, poſt detectam Aëris fixi Theoriam, non vim tantum huius fluidi extenſiuam, ſed naturam quoque eius examinantes, id Aëri Communi globum noſtrum terraqueum circumambienti quodammodo ſimilem repererunt, atque pro diſtinctione Aërem fixum appellarunt, qualis plurimis quoque aliis in corporibus naturalibus detegitur, quum eorum mixtio aliquo modo perturbatur.

Ferrum et Sulphur magnam inter ſe habent affinitatem. Quum vnita in Exiguis moleculis, vt eo ſcilicet maiori ſeſe ſuperficie tangant, atque aqua inſuper conglutinata in quietem reponuntur, mox mutuo in ſeſe agere atque reagere incipiunt, motum inde fermentatorium et calorem concipiunt, atque vera tandem vtriusque corporis reſolutio fit. Oritur hic ignis a phlogiſto ſulphuris liberato per terram ferri a craſſiori ſuo acido. Ex Ferro codem momento prodit memoratum fluidum elaſticum, ſeparatum a Baſi metallica per acidum ſulphuris. Ex acido hoc et terra ferri fit Vitriolum; fluidum vero vnitum phlogiſto ſulphureo format illam flammam claſticam. Provenire hoc fluidum ex ferro dubium non eſt. Quia ſulphur nihil Elaſtici in ſe continet, ſed econtra alia corpora

ra et aërem liberum priuare hac proprietate compertum eſt, indeque vapores eius omni generi Animalium fiunt lethales. Vtrum vero flamma illa vehat adhuc ſecum aliquid de tenuiori acido, hic decidere non poſſum. Pergo nunc ad propria mea experimenta.

Experimentum 1.

III. Limaturam ferri recentem detinui in crucibulo inter prunas locato, vsque dum canduit; adieci tunc pulueriſati ſulphuris tertiam fere partem, et mox ſpathula cuprea bene permiſcui cum metallo. Accenſum Sulphur lenta primum conſumebatur flamma, ſuffocantem de ſe ſpargens odorem, dein hic ibi Scintillae igneae apparuere in maſſa, atque breuiſſimo momento poſt eas, erupit flamma albida ſumme elaſtica, ſpeciem quaſi detonationis mentiens, eodemque inſtanti tota diſſipata eſt in aëra. Ferrum tunc totum candens et igne plenum conſpiciebatur, ſed breui poſt eius diſſipationem in puluerem terreum atrum eſt conuerſum, qui ſpirabat diu odorem ſulphureum tenuem penetrantiſſimum.

Experimentum 2.

Hunc puluerem ferri nouo candenti inieci crucibulo, et iterum cum ſulphure methodo dicta tractaui, ſimile expectans phaenomenon; ſed ne minimum detonationis apparuit ſignum. Sulphur non ſecus, ac prunis iniectum tranquille deflagrauit ſuper eum.

Experimentum 3.

Recepi Ochram ferri rubram venalem, et candefactam in Crucibulo examinaui cum ſulphure ſimili modo.

 Deto-

Detonatio ſecuta eſt; ſed longe debilior, quam cum vero Ferro.

Singulare hoc detonationis Phaenomenon ab aucta per ferrum Phlogiſti in Sulphure quantitate, deducere minime conuenit; quia, nec cum prunis ardentibus, nec cum oleis, nec cum alcali phlogiſticato id facit ſulphur, et experimentum 2um opinioni huic demonſtrat contrarium. Decomponi hac methodo Sulphur per Ferrum veroſimile eſt; verum ſi ferrum non conſtaret, quam ſolo Phlogiſto et terra peculiari ſibi propria, quemadmodum olim ita de omnibus metallis ante Beccherum creditum fuit, et nunc adhuc aſſumitur a nonnullis, decompoſitum ex Sulphure Acidum, cum phlogiſto eius ſimile priori deberet formare ſulphur. Erumpens illa lucida flamma reuera ſulphurea eſt, nam, quum deflagrat, Sulphureo Aëra inficit factore. Ergo ex acido ſulphuris et ferro vnitis oritur quidem ſulphur, ſed diuerſum a priori, elaſticum, detonans. Patet hinc, in Ferro praeter phlogiſton et terram dari adhuc fluidum tenue, mediae quaſi naturae inter Corpora ſolida et fluida elaſtica, quod Aërem fixum vocant, quodque praecipua detonationis ferri cum Sulphure cauſa eſt.

Docemur porro his experimentis, non ferro modo, ſed ochrae quoque eius aërem hunc fixum ineſſe, cumque ſemel per ſulphur expulſum, ſimpliciter igne Carbonum reſtitui non poſſe. Ferrum amiſſo ſuo aëre fixo, colore, nitore atque ductilitate priuatur, et in ſcorioſam calcem fatiſcit; vnde coniicere licet, has qualitates ab aëris fixi virtute quodammodo dependere.

Rema-

Remanens poſt detonationem (ab Exp. I.) Calx ferri cum acido vitriolico tentata, ſoluitur cum odore ſulphureo, et laeues excolores dat Cryſtallos Vitrioli, remanente multa terra inerti, inſolubili, quam a ſcoriis ſulphuris prouenire credibile eſt.

Nota. Loco Sulphuris communis adhibiti flores ſulphuris, ſimiles effectus non producunt, quia Laeves ſunt, et facile igne conſumuntur, antequam metallo bene permiſceri poſſunt.

IV. Raſurae Cupri candenti admixtum ſulphur conſumitur, antequam recte penetrare queat metallum. In olla figulina tecta ſi hoc connubium lento igne peragitur, facile tum bina coniunguntur corpora, intumeſcit maſſa, diſſipatoque per ignem ſulphure, Cuprum in griſeo-fuſcum cinerem calcinatum reperitur. Acris ſcilicet flamma Sulphuris igne dilatatos permeans poros metalli, corrodit illud, et in calcem fuſcam puluerulentam mutat; ipſum vero vix vllam patitur ab eo alterationem, niſi quod paulisper in deflagrando accelerari videatur; vnde concludendum eſſe puto, pauciſſimum aut vix vllum aërem fixum contineri in Cupro.

V. Stannum Illuſtris *Cramerus* tradit a), ſi cum ſulphuris aequali aut dupla quantitate ſtratificetur, ad ignem deflagrare, ac ſi nitrum ei foret additum, relinquereque maſſam, quae, dum adhuc ab igne rubeſcit, iam ſolide conſiſtit. De Plumbo b), ſic ſe exprimit: Plumbum cum ſulphure fuſum ad ſtrepentem deflagrationem concitatur, in maſſam coit magno igne ad tenuem fuſio-

a) Elementa art. docimaſt part. I. pag. 102. edit. Lugd. Batav. 1744.
b) Lib. et part. cit. p. 103.

nem vix deducendam. Clariſſimus *Gellert* c), de vtroque metallo aequaliter affirmat, ea cum ſulphure detonare, fieri inde fragilia, refractaria ſemi-metalloque ſimilia; de ſtanno praeterea notat, fuſum illud cum ſulphure pro parte verti in ſcoriam, et ſi repetitis vicibus haec fuſio inſtituatur, totum denique in eam mutari poſſe. Ego, quae propria de his didici experientia, enarrabo.

Experimentum 1.

VI. Libram circiter dimidiam plumbi puri fudi in catino argillaceo, qui latum et aequalem fundum habebat, vt ſcilicet diffuſum late in eo metallum maiorem praebeat ſuperficiem; fluenti tenui fluxu metallo inieci cochlear in puluerem contuſi ſulphuris, idque fuſum ſtatim cum metallo ſpathula bene permiſcendum curaui, quamuis faetidos acresque vapores vix pulmo ferre poterat; poſt paucam deflagrationem, breui ſulphur aggreſſum eſt penetrauitque metallum; ſubito tunc magno cum ſibilo quodam lucidiſſima flamma erupit, qua diſſipata totum metallum igne plenum, quaſi ferrum ignitum conſpiciebatur, et mutatum eſt in maſſam ponderoſam, friabilem, non amplius igne fuſilem, zinco ſterili quodammodo ſimilem, quae deſuper pulchre fuſco-violaceo colore tincta fuit, intus vero ex nitidis exiguis granulis metallicis tota compoſita eſſe videbatur.

Experimentum 2.

Reſiduam hanc poſt detonationem maſſam, puluerisatam in mortario, diuidi in quatuor portiones aequales, quarum

c) Chimie metallurgique traduite de l'allemand a Paris 1785. Tom. I. §. 266.

quarum vnam cum calce viua in aëre extincta mixtam retortae vitreae indidi, atque oleo oliuarum ſuperfuſam deſtillationi ſubieci: ſtillauit primum phlegma; id ſecutum eſt oleum philoſophorum dictum, ſub finem aſcedit terra pinguis Lactei coloris, quae oleo alliaceum affricauit odorem. Terra plumbi cum calce in fundo retortae remanens omni forma limum induratum referebat.

Experimentum 3.

Secundam portionem oleo vitroli examinaui, quo inſtillato mox violaceus ille atque nitidus metallicus colores disparuere, et faetidiſſimus putridus quaſi, ſulphureo mixtus inde odor ſurrexit. Feruor exiguus fuit et breui ceſſauit motus. Terra perfecte ſolui non potuit, ſed ſpoliata coloribus infundo Vrinalis manſit ſimillima Limo livido-nigricantis coloris.

Experimentum 4.

Acidum ſalis communis, quod ad ſoluendam tertiam portionem adhibui, longe potentius agit in hanc masſam. Excitat in ea ſingularem motum circulatorium, ſub quo pars vna terrae colore albo fundum vaſis petit; altera flauicans ſulphurea quaſi ſurſum ascendit, et decidens poſtea ſecundum ſtratum format. Poſtquam terra acido bene ſaturata eſt, et omnis motus ceſſauit, deſtillationem ex Retorta propter abſtrahendum ſpiritum inſtitui. Ignem per gradus ad ſublimatorium vsque auxi, at pauciſſimum tantum ſpiritum obtinui. Bulliendo diu totum fere acidum fixatum eſt in terra metallica. Sub finem operationis ad Collum Retortae ſublimata eſt pauca quaedam terra, flauo rubroque colore varia, Cinnabarim ſublimatam

per-

perfecte referens, quae prunis iniecta ſulphureos ſpirat vapores. Finito opere in fundo reperi maſſam nigram, ponderoſam, ſolidam, fragilem, quae in aëre libero leni igne funditur in vitrum caſtanei coloris, et dat flores albos inſtar antimonii crudi; a ſalibus acidis non mutatur, ab alcalinis in fuſione figitur; ſolutioni ferri in acido ſalis admixta, motum quaſi fermentatorium concipit, et in terram albam bezoardicam vertitur.

Experimentum 5.

Spiritus Nitri fumans modice aqua dilutus, quartae portioni infuſus, motum et calorem inſignem producit, atque fumos rubros cauſticos copioſiſſimos eructat, quibus omnibus ceſſantibus terra ad fundum vaſis colore albo praecipitatur, liquor limpidus euadit, qui in deſtillatione fundit ſpiritum acidum. Terra ab igne in lapideam induratur conſiſtentiam.

Similia phoenomena, qualia obſeruauimus in ferro, ſiſtit plumbum cum ſulphure tractatum, argumento claro, illud non modo ſimili eodemque cum ferro gaudere aëre fixo, ſed longe maiorem quoque eius continere quantitatem, per quam lux flammae viuidior hic redditur. Strepitus, qui ſub eruptione flammae obſeruatur, videtur indicare, arctius eum quam ferro, baſi huius metalli vnitum, meliusque a natura eſſe ſubactum, inde forte maior plumbo mollities atque fuſibilitas eſt. Priuatum per Sulphur aëre fixo, amittit ſimul has qualitates, et in terream apyram mutatur ſubſtantiam, quae ſolam ſpecificam eius retinet grauitatem, eſſentialem nempe metallicum charačte-

racterem. Color metallicus, qui granulatim in reſidua hac poſt detonationem terra apparet, particulis plumbi per ſulphur non alterati eſt tribuendus, nam iterum leui opera per ſolam Petrolei accenſi flammam in priſtinum reducuntur metalium. Color fuſco violaceus reliquam tegens terram ab adhaerentibus ei Scoriis Sulphuris prouenire videtur. Acidum Vitrioli Soluit has Scorias, et producit cum iis foetidum ſpiritum ſulphureum; Terra tunc ſub genuino ſuo liuido colore comparet, Limi formam habens. Olea vnguinoſa, acuata praeprimis et attenuata per cauſticum calcis viuae, reſoluunt quoque et ſeparant has ſcorias a terra, tenue earum ſulphur, cauſam nempe coloris, blando ſuo extrahunt pingui, atque in deſtillatione ſecum eas eleuant ſub forma terrae albae; qua ex miſcela oritur odor Alliaceus.

Acidum ſalis per coctionem perfecte metallicam terram ſoluit, et communicat ei ſalinas ſuas qualitates, vnde exſurgit corpus inter Salia et Metalla neutrum, ſemi-metallo ſimillimum, quod leni igne funditur in vitrum fuſcum, et ſublimatur in flores. Aqua vero eſt indiſſolubile, inſipidum, inodorum, diuerſum igitur a Saturno cornuo, et proxime ad antimonium accedere videtur. A ſalibus alcalinis et per Ferrum pro parte decomponitur, vnde terra iterum fixior euadit.

Acidum Nitri vix directe in terram Plumbi agere, ſed ſolummodo phlogiſton eius extrahere videtur; Copioſiſſimis enim et denſiſſimis fumis fere totum in aëra diſſipatur, et terram non ſolutam relinquit, quae phlogiſto priuata album induit colorem.

Experimentum 1.

VII. Accedo nunc ordine ad ſtannum examinandum. Metallum hoc purum, pro quali Malaccenſe, Anglicanum et Saxonicum in Commercio ſolet aeſtimari, adeo rarum eſt, vt nullo pretio obtinere potuerim. Coactus igitur fui, experimenta mea inſtituere cum ſtanno vulgo venali, quod ordinario quartam fere partem plumbi admixtam ſibi habet. Sumſi talis Stanni Libram; fudi illud in Catino lato; adieci duo cochlearia pulueriſati Sulphuris; fuſum hoc bene permiſcui cum metallo; poſt aliquot momenta detonatio facta eſt ſimilis illi, qualem in plumbo obſeruauimus; ſub finem flammae elaſticae ex terra candente fumus quidam albus fuit eleuatus, et breui denſatus in puluerem iterum delapſus eſt ſuper eam. Refrigerata reſidua terra partim violacei, partim nigri Coloris, et in lamellas quaſi diſpoſita fuit, duras et fragiles, amiſſo ſplendore metallico; infra quas aliae tenues, multo fragiliores, coloris fere margaritarum reperiebantur Lamellae metallicae, quae ſeparatae a rudiori terra et in Crucibulo fuſae confluxerunt in priſtinum metallum, verum admodum ſtridens, minus compactum, laeuius, et guſtu quodammodo auſterum.

Experimentum 2.

Recepi hoc ſtannum ex lamellis mox memoratis obtentum; deduxi illud in catino, vt prius, ad fluxum perfectum; fluenti inieci ſufficientem ſulphuris quantitatem, detonatio iterum ſecuta eſt; verum longe minor, et flamma longe debilior minorique cum impetu erupit, nec colore adeo viuida, vt prius; remanſit metallum totum

in

in lamellas exiguas, fragiles, rigidas, colore tamen pallido matallico adhus gaudentes mutatum, ac omnibus veri metalli qualitatibus, excepto pondere, orbatum, atque vix aut ne vix quidem in priſtinum reducibile ſtatum.

Ex his duobus experimentis concludendum eſſe puto, ſtannum longe firmius retinere ſuum aërem fixum, maiorique a natura praeditum eſſe eius quantitate, quam plumbum, atque inde haud adeo facile deſtrui a ſulphure; verum, ſi repetitis vicibus eius accenſio inſtituatur, revera totum denique in ſcorias lamelloſas non amplius igne ſimplici fuſiles verti poſſe. Diſcimus hinc iterum, ſub detonatione hac metallorum ſulphur, quod ad experimenta adhibitum fuit, non omne cum flamma elaſtica in auras diſſipari; ſed groſſiorem eius partem cum terra metallica remanere atque hanc coloribus tingere. Salinum principium eſſentialiter Baſi imperfectorum metallorum inhaerens, euolui per detonationem illorum cum ſulphure, colligimus ex conſtanti figura lamellata reſiduae terrae, quae ad teſſeras Criſtalli Vitrioli quodammodo accedere videtur, atque magis ex ſapore ſubauſtero ſtanni ſemel cum ſulphure detonati. Nam hunc ſaporem non ab acido ſulphuris adhaerente prouenire, vel ex eo clarum eſt, quod lamellae illae ſtanneae auſterae a ſulphure plane immaculatae, et colore ſplendoreque puro metallico praeditae fuerunt. Fumus albus, qui ſub finem flammae elaſticae ex ſtanno erumpebat, fuit plane inodorus, et puluis eius inſipidus; ergo non prouenit ab arſenico, quod naturaliter inhaerere ſtanno, poſt experimenta Illuſtr. *Margrafii* ab omnibus fere creditur; ſed potius, vt per experimenta mihi conſtitit, et ex figura lamelloſa terrae concludere licet, a

parte florum Zinci fuit formatus. Nec mirum eſt. Fuerunt enim Authores magni nominis *d*), qui iam pridem aſſeruerunt et demonſtrarunt ſimilitudinem inter Stannum et Zincum.

Reſiduae poſt detonationem Stanni Maſſae ſuperinfuſum acidum vitrioli vix vllam produxit mutationem, ſed digeſtione mucilaginoſam quamdam extraxit ſubſtantiam, quae mora temporis in Capillares Cryſtallos prismaticas concreuit. Signum praeſentiae terrae Zeoliticae. Acidum ſalis lamellarum ſtannearum (exp. I.) in momento deſtruit colorem, et mutat eas in terram albam. Acidum Nitri ab iis concentratiſſimum et fumans redditur.

VIII. Argentum fuſum ab adiecto ſulphure plumbeo tingitur colore, et acritate vaporum eius corroditur in griſeo fuſcum puluerem, facile tamen iterum in priſtinum reducibilem metallum. Flammae elaſticae nulla hic ſigna, aut ſimilia vt in Cupro animaduertuntur phoenomena.

IX. Mercurius facile in ſuam aggregationem recipit ſulphur, et ſi in vaſibus clauſis per ſublimationem cum eo vnitur, conſtituit cinnabarim. Si ſuper leui Calore trituratione bina haec corpora coniunguntur, oritur inde ſic dictus aethiops mineralis. Si mea methodo, calefacto, quantum ferre poteſt, Mercurio adiicitur Sulphur, pro parte calcinatur ab eo, et mixtum cum reſiduis Scoriis Sulphuris format maſſam Nigram. Tennior tamen et magna

---

d) In actis academ. Regiae Scient. Pariſienſis.

magna pars mercurii intacta relinquitur, quin fluidior et purior reddi videtur.

X. De Wismutho tandem addemus non nulla. Metallum hoc fuſum et cum ſulphure mixtum, Scintillas primo igneas, et mox flammam edit lucidam, ſed breui ceſſantem. Vertitur poſtea in terram fuſcam, intus granulis metallicis pallido-albidis conſtantem.

Experimentum 1.

Cum acido vitrioli probata haec terra, incaleſcit leuiter, et in faetidum illud vertit Spiritum Sulphureum; ipſa vero ab eo non ſoluta manet, et, quod mirum eſt, priſtinum tunc metalli recuperat ſibi colorem.

Experimentum 2.

Acidum Salis communis absque vllo fere cum ea coit motu, mora tamen et coctione certam eius ſoluit portionem, eamque in deſtillatione ſecum per collum Retortae ducit; fit inde liquor ſatis limpidus, qui Ferro aut Zinco, aut Stanno inſtillatus dimittit in inſtanti aterrimam ex ſe terram, quae ſiccata et in igne examinata ſulphurea eſſe deprehenditur. Si vero idem liquor aqua fontana diluitur, ſecedit inde terra candidiſſima.

Nota. Acidi Salis requiritur fere quintuplum ad vnam terrae partem ſoluendam. Aqua fortis cum aliquot Acidi Vitriolici guttis mixta longe facilius eam ſoluit, et ſolutio eadem fere producit phoenomena.

Experimento primo probatur, acidum Vitrioli non agere directe in calces metallicas per Sulphur productas, ſed ſolas Sulphuris Scorias iis adhaerentes ſoluere. Praeterea inde patet, colorem genuinum Wismuthi per Sulphur non deſtrui, ſed ſolum obfuſcari.

Acidum Salis quemadmodum cum Wismutho ipſo, quum nempe admixto ei mercurio ſublimato fit deſtillatio docente Illuſtri *Pott* e), ita cum Calce quoque eius facit ſpeciem ſic dicti *Butiri*, quod per ferrum, Zincum et Stannum decomponitur; Terra Wismuthi, quum haec metalla per acidum ſalis ſoluuntur, attrahit ſibi ex iis exhalantem phlogiſticam materiam, et atrum inde aſſumit colorem. Mirum eſt hoc, quod verum tunc ſulphur conſtituat; vnde concludo, Acidum vitriolicum, eſſentialiter ei ineſſe. Si Sulphur hoc igne comburitur, remanet terra rubra, iners, non amplius metallica. En veram Wismuthi Analyſim, ex qua clare natura huius ſemimetalli perſpicitur.

XI. Nunc diiudicanda iam nobis venit ipſa illa flamma elaſtica, quae ex metallis producitur per Sulphur. Eam ſulphuream eſſe dixi, ſed aëre fixo metallorum impraegnatam, quod vt probem, ſequens inſtitui experimentum: Recepi Stanni vulgaris Libram ſemis, fuſo adieci Sulphur, et miſcendo ea Spathula aenea detinui in igne, vsque dum e maſſa Scintillae igneae hic ibi prodire caeperunt; effudi tunc eam ſuper Laminam Cupream frigidam, ſuperiectisque variis Linteamentis extinxi ſulphur et ſuppreſſi ita detonationem; dein comminutam in Mortario, Retortae indidi

e) In diſſert. ſua de Wismutho.

didi vitreae, et adaptato vaſto Recipiente deſtillationem igne mediocri inſtitui. Fuſa maſſa copioſiſſimos edidit fumos albos, qui adinſtar Riui ruebant in vas Excipiens, et breui totum repleruut. Cauens porro Rupturam vaſorum, ſuſtuli de igne Retortam, antequam operatio finita fuit. Quum Retorta in aëre refrigerabatur, fumi ex Recipiente omnes in eam redierunt, et fixati ſunt ſuper terram ſuam. Fracta demum Retorta reperi pulcherrimas Cryſtallos ſubpriſmaticas, ſubdiaphanas, partim luteas, partim rubicundas, quae omni in examine verum et puriſſimum, quale vix vnquam produxit Natura, Sulphur ſiſtunt. Parietibus bulbi adhaeſit terra quaedam fulua, ſuperficie polita nitida, quam a Scoriis Sulphuris volatiliſatis provenire credo.

Experimentum hoc quamuis non finitum, meis tamen votis perfecte ſatisfecit. Loco flammae in vaſibus clauſis vapores elaſtici prodierunt. Ex his ortum eſt Sulphur cryſtallinum; ergo verum eſt, quod dixi.

XII. Denique reſtaret mihi adhuc explorare naturam et qualitates Aëris illius fixi in Metallis contenti; ſed deſtitutus vlteriori in hoc experientia, nihil certi de eo pronunciare poſſum. Coronidis vero loco corollaria non nulla ex ſupradictis deducta hic ſubiungam.

I. Metalla imperfecta priuata Aëre fixo in ſcorioſas mutantur calces, eo vero reddito priſtinum recuperant ſplendorem, vt id Mercurii praecipitati rubri per Aërem fixum ferri reuiuificatione probari poteſt.

II. Met-

II. Mettalla non phlogiſto, quod vnum idemque in omnibus eſt, ſed Baſi ſua differunt metallica.

III. Semi-metallis et metallis imperfectis aliquid ſalini ineſt.

VI. Grauitas ſpecifica metallorum in Baſi eorum eſt poſita.

V. Criſtalliſatio Sulphuris prouenit ab introductione ei Aëris fixi.

DE
NATVRA ARSENICI.

Auctore
NICAETA SOCOLOFF.

Arſenicum propterea, quod animalibus exitioſum per ſe venenum ſit, a phyſicis negligi non debet; verum ob vim ac efficatiam, qua pollet, corpora metallica et omne fere genus terrarum alterandi ac immutandi, maiori prae caeteris admiratione et attentione dignum eſſe videtur.

Inter eruditos a longo tempore de Natura Arſenici fuit diſputatum; hucusque tamen nondum rite definitum et per experimenta probe demonſtratum eſt, quibusnam proprie ex partibus illud eſſet conſtitutum, et ad quam mineralium claſſem aptius referendum. Clariſſimus *Junkerus* in conſpectu chemiae ad finem Tomi ſecundi, in appendice definitionum, Arſenicum definit per corpus ex ſubſtantia metallica per vapores ſulphureo - ſalinos ſubtiliter corroſa conſtans, et alibi, Tabula XLVII., de Bi-

tuminibus ait; ſi Bituminis ardor, ſale communi auctus, certas metallorum mineras corripiat, varia cramata volatilia Arſenicalia et ipſum fortaſſe Cobaltum Alicubi generari poſſe. Ex quibus patet, non vnicum ſulphur, nec ſolum acidum ſalis, ſed vtrumque ſimul ab authore ſtatui in Arſenico; quod in quantum ſit verum, infra videbimus. Pariter Dn. *Lemery* in ſua chemia pag. 439, Arſenicum ex ſulphure et ſale quodam cauſtico conſtare affirmat. Celeberrimus *Pott*, vir in practica chemia experientiſſimus, in diſſertatione ſua de Auripigmento, contra opinionem *Junkeri*, exiſtentiam ſulphuris in Arſenico ſolidis refutat Argumentis. Nam purum, inquit, et album arſenicum nunquam flammam inſtar ſulphuris concipit (quod *Stahlii* quoque per experimenta confirmatur), nec cum nitro in crucibulum candens iniectum, aperta flamma deflagrat, ſed cum ebullitione quadam fluxionem ſubit; nec denique cum mercurio ſublimato deſtillationi ſubiectum dat cinnabarim, prout alia corpora ſulphurea ſolent. De ſalis praeſentia in Arſenico paulo aliter vir illuſtris arbitratur, et dubitare magis, quam eam perfecte negare videtur; verum poſtea aliorum experimentis et rationibus conuictus, lubenter, dari ſalem, conceſſit. Nam reuera Arſenicum in XV. partibus aquae feruidae eſt ſolubile, et Linguam, ſi eo tangatur, quamuis non ſtatim, vt ſalia pura ſolent, acriter tamen et fortiter vrit et mordet, vti clariſſimus *Ludouici* id primus in egregia diſſertatione de hoc corpore habita probauit; et nobiliſſimus *Lehmannus* in Cadmiologia atque aliis ſuis ſcriptis chemicis, vberrimis ac ſolidiſſimis naturam Arſenici Salinam confirmauit argumentis, quae omnia hic adducere nimis foret longum.

Claris-

Clariſſimus *Vogelius* in ſiſtemate mineralogico nouo, Arſenicum ſub nomine ſalis ammoniacalis metallici deſcripſit, et ſalinam eius naturam per *Lehmannum*, multis anniſus eſt probare argumentis. Opinio haec communiter nunc ab omnibus fere recentioribus chemicis atque mineralogis eſt recepta; tamen, ſi recte perpendimus et probe ponderamus documenta, quae ad defenſionem eius a fautoribus proponuntur, fateri cogimur, nondum ex iis recte inferri et concludi poſſe, Arſenicum non ſulphuream aut ſemi-metallicam, ſed veram et perfectam in ſe eſſe ſalinam ſubſtantiam. Solui per coctionem in quindecupla aquae quantitate et Linguae acrem imprimere ſaporem, demonſtrat quidem, aliquid ſalini ſubeſſe; verum ſimul hic notandum, id proprium eſſe ſoli criſtallinae et puluereo-calciformi ſpeciei Arſenici, arte magis, quam natura in hanc formam redactae, vbi ſcilicet ſemper de iis corporibus, cum quibus tractatur arſenicum, aliquid ſolet adhaerere, vel potius, vbi Arſenicum cum terreo-ſalinis magis, quam metallicis commixtum eſt ſubſtantiis: de aliis Arſenici ſpeciebus formam natiuam et texturam coloremque metallicum ſeruantibus neutiquam id dici poteſt. Certe Arſenicum pro variis circumſtantiis varii generis aſſumit formas, et hinc maxime ambiguum videtur eſſe genus inter ſalia, ſulphura et ſemi-metalla; nouimus tamen et ſatis perſpectum habemus, ex natura ſua nulli corpori magis eſſe affine et facilius auidiusque vniri, quam genuinae ſuae, in qua naſcitur, terrae metallicae, quae magnetis inſtar ad ſe illud trahens, ex omnibus mixtionibus ſiue combinationibus praecipitare ac decomponere valet, vti id exemplo Salis neutri arſenicalis ab illuſtri *Macquero* primum detecti, optime probatur; quippe quod neque

 ab

ab acidis mineralibus, neque ab vlla alia Materia, praeterquam terra metallica decomponi poteſt; vnde recte concludi poſſe puto, non Salinocriſtallinam, ſed metallicam potius formam, arſenico eſſe propriam et naturalem. Hinc puritas quoque minerarum arſenicalium non a criſtallina figura iuxta recentiores, ſed a regulina potius Forma eſt iudicanda, quemadmodum Clariſſimus quoque *Monnet* in diſſertatione ſua de Arſenico *), quae praemium ab Academia regia Scientiarum Berolinenſi pro anno 1773 reportauit, putat, qui purum et virgineum Arſenicum natiuum deſcribit per ſubſtantiam ponderoſam, duram, fractura granuloſa nitida, politura inſtar chalybis ſplendida, quae tamen a contactu aëris immutatur et abſcuratur. Nam in ſtatu regulino Arſenicum magis fit volatile, quam in Criſtallino, fumum dat longe denſiorem et odorem penetrantiorem, in textura ſua redditur compactius, ſolidius et ponderoſius; ergo omnes eius qualitates eſſentiales magis depurantur et exaltantur.

Veteres Mineralogi, vt Clariſſimus *Bromel*, *Voltersdorf*, *Vallerius*, *Cartheuſerus*, *Iuſti* et alii, propter rationes, quod arſenicum pondere gaudeat metallico, et quod cum naturaliter in ſuis mineris, tum artificaliter chemicis encheireſibus facile ſuſcipiat ex calce formam regulinam, et in hoc ſplendido ſuo ſtatu cum omnibus metallis, excepto Wiſmutho, in fluxu amicabiliter coeat, ad ordinem ſemi-metallorum illud retulerunt. Nemo ſane negare poteſt, arſenicum metallicae eſſe proſapiae, atque binis illis qualitatibus, nempe quod pondere gaudet metallico et ex calce in regulinam reducitur formam, ac denique quod ſub malleo non eſt extenſile,

*) A Berlin. chez Chretien Frederic Voſs. 1774.

tenſile, igne autem fit volatile, perfecte cum notis characteriſticis ſemi-metallorum conuenire; ſi autem, ſeueriori examine inſtituto, vlterius illud cum his conferre ac comparare velimus, videbimus non minus ab his, imo plus, quam a ſalibus diſtare. Nam omnes calces vt metallorum, ita ſemi-metallorum quoque, poſtquam ſuo phlogiſto, quod dat ipſis ſplendorem metallicum, perfectae ſunt orbatae, in igne reſtant fixiſſimae; econtra vero Arſenici calx, quam Arſenicum album ſolent vocare, ſemper et conſtanter, imo ante fuſionem eſt volatilis. Porro calces metallicae aut plane non, aut difficulter ſoluuntur in acidis; arſenicalis vero non in acidis tantum, ſed oleis quoque, imo aqua bulliente, ſi requiſita horum menſtruorum quantitas adhibeatur, eſt ſolubilis, atque ex aquea illa ſolutione, poſt euaporationem debitam et refrigerationem praecipitatur Cryſtallis luteis, transparentibus irregularis plerumque figurae. Prae caeteris autem notabilis eſt ea Arſenici a reliquis ſemi-metallis diuerſitas, quod Calx eius ſublimata ab igne, det fumum odore alliaceo, et quod tentata guſtu, acerrimum Linguae imprimat ſaporem. Nam omnium metallorum et ſemi-metallorum Calces, ſi rite paratae fuerint, perfecte inodorae ſunt et inſipidae, excepto forte ſolo Antimonio. Addi denique hic illud meretur, quod non ſolum Arſenicum in ſtatu regulino, ſed Calx etiam eius, excepto Wiſmutho, omnibus metallis et ſemi-metallis per fuſionem facile vniatur et adeo firmiter adhaereat, vt vix ab iis tandem ſeparari queat; id quod nulli alii, neque terreae neque metallicae calci proprium eſt. Singulare pariter illud phoenomenon eſt, quod Arſenicum cum Nitro tractatum producit. Si ſcilicet cum aequali portione Nitri fuſioni ſiue deſtillatio-

 ni

ni ſubiiciatur, non detonat cum hoc ſale in modum aliorum metallorum, ſed inſtar acidi vitriolici perfecte decomponit Nitrum, et expulſo acido nitroſo, quod inde faetidum ac penetrantiſſimum prodit, et condenſatum in recipiente per aquam, caeruleſcente quodam colore leuitur tinctum apparet, cum Baſi ſua conſtituit ſalem quemdam medium, qui in aqua ſolutus poſt euaporationem dat criſtallos prismaticas vtrinque pyramidatas, quadrangulares; quem primus Celeberrimus *Macquer* *) ſub nomine Salis neutri arſenicalis deſcripſit. Haec ex natura Arſenici deducta argumenta ſatis, credo, demonſtrant, minime id in genere conuenire cum ſemi-metallis. Neque igitur ſal, neque ſemi-metallum eſt, ſed mediae cuiusdam naturae inter ſalia et ſemi-mettalla.

Illuſtriſſimus *Linnaeus* poſt *Beccherum* primus Arſenicum in ſua Mineralogia pro Sulphure metallico declarauit, fumo albo, in quem a calore ignis reſolui ſolet, et odore fumi phoſphorico-alliaceo a reliquis diſtinguendum. Arſenicum, inquit, cum aqua Soluatur, ſalibus, cum det regulum, metallis a quibusdam adnumeratur; egò, quod ardeat, fumet, odorem ſpargat, metalla mineraliſet, et quod pyritae ſit oppoſitum, ſulphuribus inſerui. Ingenue Celeberrimus author ſimul quaerit, vtrum regulus Arſenici genuimus ſit, vel ſpurius?

Sulphurum metallicorum primam notionem Dn. *Beccherus* nobis formauit, verum adeo obſcuram et imperfectam,

*) Voyez le Recueil des memoires de l'academie des ſciences pour les années 1746 & 1748. à Paris.

fectam, vt quibus haec proprietatibus cum ſulphuribus communibus naturaliter in genere conueniant, vix dicere poſſumus. Praecipue quod ad genus *Beccheri* aureum attinet, ex idea, quam de ſulphure vulgari habemus, incredibile certe videtur eſſe, vt in fixiſſimo et maxime impermutabili igne corpore (auro) ſimile quid ſalinae aut inflammabili ſubſtantiae reperiatur. Illuſtris *Linnaeus* *) ſulphura metallica a reliquis diſtinguit eo, quod ſalino ſcateant metallico; vtrum vero proprio ſenſu pro ſulphuribus haberi mereantur, non disquirit. De Arſenico ſane dubitare non poſſumus, quin hoc verum ſit. Nam quamvis album purum Arſenicum prunae iniectum, nullam dat in modum ſulphureorum corporum flammam; vbi tamen cum phlogiſto abundantibus corporibus, exempli gratia, ferro in fluxu certo modo miſcetur, vt ſaturetur ignea materia **), tunc veram ac euidentem, exiguam licet, edere ſolet flammam, id quod pariter in mineris eius naturalibus, metallica forma gaudentibus obſeruatur, et clariſſimus ſupra citatus *Monnet* ***) idem de naturali et puro Regulo arſenicali, qualis olim 1755 et 1760 annis ex metallifodinis Ste. *Marie* aux Mines magna quantitate fuit erutus, affirmat. Fumus albus denſus, odore alliaceo inſtar phoſphori faetens, qui eſt ſemper proprius et genuinus arſenico, quum igne reſoluitur in vapores, demonſtrat Materiam ſiue terram phlogiſticam eſſentialiter magna

*) Syſtematis Naturae Tom. III. claſſ. II. minerarum.

**) Vid. Joh Gotſchalk Vallerii *phyſiſcher Chemie zweiter Theil, dritte und vierte Abhandlung*, cap. 15. §. 23. No. 6.

***) Diſſertation ſur l'arſenic, qui a remportè le prix etc. à Berlin 1774.

gna ei copia ineſſe, verum ſimul ita ſuppreſſam, obuolutam et ſalino principio eſſe ſubactam, vt in flammam erumpere et qualitates ſubſtantiae igneae communes monſtrare nequeat, ſed quaſi calcinata aut in terreo-calcaream ſubſtantiam conuerſa appareat *). Hoc phlogiſton in Arſenico contentum in cauſa eſt, quod illud non in regulina tantum forma, ſed in ſpecie calcis quoque facile cum omnibus vniatur metallis. Deinde dari in Arſenico principium ſalinum, et mixtionem eius eſſentialiter acidum quoddam, tanquam principium conſtitutiuum ſecundum, ingredi, clarum ac euidens vel inde fieri poteſt, quod maxima et omnibus animalibus lethali gaudeat acrimonia, et quod facile criſtallino-ſalinam ſuſcipiat figuram; denique quod Nitrum decomponat, et acidum nitroſum, ex ſua Baſi expellat, atque cum ea medium conſtituat Salem. Haec porro Arſenici cum Nitro tractatio, per faetorem acidi nitroſi indicat, oriri hic ex combinatione arſenici cum Baſi Nitri, ſpeciem aliquam hepatis ſulphuris, cuius odore et phlogiſto metallico infectum acidum nitroſum, faetidum et penetrans atque colore caeruleſcens redditur. De hoc Arſenico fixato per Nitrum, illuſtris *Pott* in diſſertatione de ſulphuribus metallorum **) prodit, quod omnia fere metalla, ſi cum eo caementenur, ſoluere valeat, quod hepati ſulphuris communis quoque proprium eſt.

His

*) Phlogiſton metallicum non eſt pura et elementaris materia ignea, ſed potius eſt vera, vt recte Beccherus appellat, terra phlogiſto abundans, qualis in ſcoriis ſulphuris et oleis expreſſis cernitur.

**) Vid. diſſertations Chymiques de Mr. Pott, traduites de l'allemand par M. Demaſchy à Paris 1769. Tom. I. pag. 107.

His poſitis facile nunc reliquae proprietates Arſenici explicari poſſunt. Volatilitas omnibus ſulphuribus propria eſt; Arſenici vero ante fuſionem in ſpecie fumi albi ſublimatio demonſtrat, illud inſigni copia phlogiſticae terrae, atque tenuiori, quam quod aliis ſpeciebus ſulphureis ineſt, principio ſalino eſſe praeditum. Solui in certa aquae quantitate, et ex hac ſolutione criſtallina praecipitari figura, improprium equidem eſt ſulphuribus; tamen inde recte concludere non poſſumus, arſenicum ad claſſem ſulphurum haud naturaliter referri. Nam, quatenus eſt corpus ſale acido et phlogiſto conſtans, eſſentialiter non poteſt non congener eſſe ſulphuribus; verum duo illa principia eius conſtitutiua in Mixtione ſua, ſingulari et diuerſo plane a reliquis diſpoſita ſunt modo, ita vt non phlogiſtica terra, quemadmodum aliis in corporibus ſulphureis, ſed ſalinum principium magis euolutum ac extrapoſitum ſit, in modum fere Vitrioli; vnde magis quoque ſolubile Aqua euadit. Peculiari praeterea et longe a reliquis diuerſo Arſenicum gaudet ſale acido, quod differentiae illius praecipua cauſa eſt.

Ab Acidis mineralibus ſolui Arſenicum, minime mirum eſt. Nam habemus exempla in Wismutho, Marcaſita et pyritae variis ſpeciebus, quae licet ſulphure omnino factae ſunt, actioni tamen Acidorum mineralium, praecipue poſtquam leuiter calcinatae ſunt, reſiſtere non poſſunt. Caeterum communiter hic notandum eſt, ſulphura metallica longe maiorem cum acidis habere affinitatem, quam reliqua Bitumina ſiue ſulphur Vulgare. Acidum Nitri facillime omnium aggreditur Arſenicum et fumans ac pe-

netrantiſſimum ab eo redditur. Solutio Arſenici in Acido ſalis Butirum arſenicale apud chemicos dici ſolet, quod paratur vel per ſe, ſi ſcilicet acidum illud aliquoties ab Arſenico per deſtillationem abſtrahatur, vel, quod facilius eſt, ſi Arſenicum ſulphuri communi vnitum, vt in Riſigallo vel Realgare eſt, cum Mercurio ſublimato corroſiuo aequali portione mixtum deſtillationi ſubiiciatur; vbi vera fit vtriusque corporis decompoſitio, et noua combinatio. Acidum rapit ſecum Arſenicum, et cum eo in forma Liquoris acerrimi deſtillat; Mercurius vero Sulphuri iungitur, et ſublimatum cinnabarinum cum eo format. Acidum Vitriolicum proprie non ſoluit ſed figit Arſenicum, ita vt coctum cum eo, poſt abſtractum acidum, ignem fuſionis ſuſtineat, et inſtar vitri fluat, quod Aëri expoſitum ſponte in deliquium abit. Celeberrimus *Macquer* (c) obſeruat, Oleum Vitriolicum per abſtractionem a ſufficiente Arſenici quantitate, imbui ſingulari odore ſimillimo illi, qualem ſpiritus ſalis communis de ſe fundere ſolet.

Paradoxum in ſupra dictis videbitur forte nonnullis, ſupponere me, materiam phlogiſticam ita ſupprimi, obuolui ac ſubigi poſſe a principio ſalino, vt in flammam erumpere, atque communes materiae igneae qualitates monſtrare nequeat; verum, qui in practica chemica paulo magis verſati ſunt, id minime iis mirum videri poteſt. Nam ſimile et maxime analogum huic habemus exemplum in Sul-

(c) Dictionaire de Chymie. Tom. I. Sous l'Article d'Arſenic.

Sulphure communi, cum ſale Ammoniaco tractato (*d*). Si ſcilicet Sulphuris communis et ſalis ammoniaci aequales miſcentur partes, et leui digeſtione intimius coniunguntur, denique vero igni exponuntur aperto, non accenditur, vt ſolet ex ſua natura, Sulphur, ſed totum abque vllo indicio flammae, cum floribus ſalis ammoniaci ſublimatur in ſpecie fumi. Multo minus inflammatio locum habet, ſi duae ſulphuris partes cum tribus partibus ſalis ammoniaci mixtae igni exponuntur, ſed vtriusque corporis flores inſtar fumi absque vlla accenſione eleuantur in altum, remanente infra exigua terra quadam fuliginoſa griſeo-nigri coloris. Si eleuati ſulphureo-ammoniacales flores (quum ſcilicet experimentum inſtituitur per deſtillationem vel ſublimationem) vlterius igne tentantur, vel ardenti Candelae exponuntur; eodem ſe gerunt modo, vt prius, et ne minimum quidem flammae ſulphureae praebent inditium. Si autem in pollinem pulueriſati aqua eluuntur; ſoluto Sale ammoniacali praecipitari ad fundum ſolet puluis luteus, qui igne examinatus, verum ſe eſſe Sulphur, monſtrat per flammam ſulphuream. In hoc experimento igitur, reuera phlogiſtica materia in ſulphure contenta ſupprimitur per ſalem ammoniacum.

Adhibui porro ſuperius ſingularem nec omnibus forte acceptam expreſſionem, terram nempe phlogiſticam per ſalinum principium in calciformem mutari poſſe ſubſtantiam, perinde ſcilicet eſt, ac ſi dicerem, Arſenicum

 eſſe

(*d*) Vid. Diſſertation Chymique de M. Pott. Sur le ſel ammoniacal ſecret Sect. IV. Libr. citato.

eſſe ſulphur metallicum formam calcis metallicae habens. Suppoſitam veritatem vt probem exemplis, primo mihi memorandum eſt ſulphur Antimonii auratum, ſiue ſic dictum puluerem Carthuſianorum, qui ſub ſpecie calcis rubrae conſpicitur, et nec colore nec fluxilitate cum ſulphure conuenit communi; tamen, ſi cum Mercurio praecipitato rubro mixtus, et exigua quantitate aquae incorporatus, leui ſubiicitur digeſtioni, verum ſe eſſe ſulphur, probat adore ſulphurei ſpiritus. Exemplum pariter clarum habemus in vitriolo vulgari viridi, in quo terra phlogiſtica, quae coloris eius cauſa eſt, Baſi metallicae adhaerens, ſimul cum hac, imo acido vitriolico praeſente, calcinationem perfert. Clariſſimus ſupra non ſemel citatus *Monnet e*), in egregia ſua de Arſenico diſſertatione, propria affirmat experientia, multis ſe vicibus et diuerſa proportione intime coniunxiſſe ſulphur commune cum pura ferri calce, et vera calce plumbi; atque vlterius vitri antimonii exemplo calcinationem ſulphurum demonſtrat, quod tale eſſe dicit, quatenus portionem ſulphuris in ſe continet. Hac ex ratione clariſſimus Author diuidens mineras Arſenici naturales 1.) in mineraliſatas Sulphure 2.) mineraliſatas aliis corporibus metallicis, 3.) calciformes, 4.) talem quoque admitti poſſe putat diuiſionem minerarum metallicarum, in quibus Sulphura metallica in ſpeciem terrae aut calcis ſunt verſa. Peut-etre, dit il, trouverons nous, lorsque la mineralogie ſera plus avancée, qu'il en exiſte en-

---

(*e*) Vid. Diſſertation ſur l'Arſenic, qui a remporté le prix de l'Academie royale de ſciences & belles Lettres. A Berlin 1774. vid. notam c).

encore une quatrieme ſorte, celle dans les quelles les metaux, reduits auſſi a l'état de terre, ſeroient neanmoins combinés avec le ſoufre; car il eſt ſur, que le ſoufre ſe combine avec certaines chaux Metalliques.

Vt vero denique ſupra allegatis meis ad demonſtrationem ſulphureae Arſenici naturae argumentis, maius addam pondus atque valorem, propria non nulla ad confirmandam rei veritatem adducere lubet Experimenta.

Analiſis chemica Arſenici a plurimis Authoribus, plurimisque modis fuit tentata, verum exiguo admodum cum ſucceſſu, et Arſenicum in omnibus experimentis ſemper ſe idem eſſe manifeſtauit. Adeo certe ſimplex videtur eſſe corpus, vt vix vllum fere reperiri poteſt medium, quo in mixtione ſua turbari ac decomponi queat. Ego poſt inania plurimorum Authorum hunc in finem inſtituta tentamina, arſenicum cum diuerſiſſimis tractaui ſubſtantiis; fateri tamen debeo, vix quidquam ſolidi ac certi ex analiticis meis experimentis dediciſſe. Singulare ſane illud eſt, quod, ſi duae partes Arſenici cum tribus partibus Aluminis crudi mixtae, deſtillationi ſubiiciantur, prodit primo phlegma ſiue Liquor fortiſſimo odore Sulphurei ſpiritus gaudens; ſublimatur dein Arſenicum partim criſtallina, partim calciformi ſpecie, et in fundo retortae remanet terra aluminaris ſicca, inſtar pumicis poroſa, colore griſeo. Phlogiſticam materiam Arſenici experimentum hoc clare demonſtrat; tamen poſtea ſublimatum Arſenicum remanet in ſua natura minime mutatum. Vitriolum viride ſimili modo cum arſenico tractatum evndem producit effectum, excepto, quod

 pau-

paulo fixius Arſenicum ab eo reddi videtur. Cum Bituminibus variis, adiuncta argilla ſimul, deſtillatum arſenicum, ſublimari ſolet figura criſtallina, colore inſtar diamantis fere ludens. Cum Lapide cauſtico mixtum facile ſoluitur Arſenicum, et ſi ſolutio illa aqua diluatur, per moram aliquam temporis, in grumos cogi, et praecipitari ad ſundum vaſis obſeruatur; odorem autem ſolutio nullum fere praebet.

Synthetica itaque denique methodo naturam Arſenici imitari conatus ſum. Poſt plurima incaſſum tentata, ſumſi deinde Mercurium ſublimatum corroſiuum, atque tres eius partes cum quinque partibus lapidis cauſtici praecipitaui ſicco modo; infudi deinde aliquot gattas olei Vitrioli, quod efferuescentiam produxit, et excitauit vaporem aliquem album, qui tamen mox iterum denſabatur, et deſcendebat ad terram; denique ad ſaturationem vsque inſtillato acido vitriolico, factus eſt ſuper terram liquor Mercurialis, qui, ſi frigori exponitur, in tenues capillares priſmaticas concreſcit criſtallos; ſi vero ferro vel potius chalibi polito inſtillatur, agit in modum Acidorum, rodit metallum, et odorem tenuem, penetrantem alliaceum ſpargit, atque metallo maculam ſingularem albam imprimit, quod infallibile ſignum eſt producti Arſenici. Fit itaque hoc experimento ſpecies Arſenici Liquidi artificialis, quod omnibus naturalis Arſenici gaudet qualitatibus, excepta ſola conſiſtentia. Per actionem Acidi Vitriolici in terram lapidis cauſtici, Mercurius praecipitatus cum Acido ſalino e Baſi ſua terrea expellitur et reſuſcitatur, atque in forma Vaporis albi humidi eleuatur, ſponte per ſe denſabilis in Liquorem aqueum. Spiritum Acidi Vitriolici, vel, vt rectius

rectius dicam, aërem fixum vitriolicum admixtum eſſe huic albo fumo, demonſtrat aquea eius humiditas. Quum igitur Liquor ille ferro inſtillatus, agit in metallum, acidum Vitrioli in eo contentum, ſulphureum primo producit ſpiritum, qui deinde ſubactus Sale medio Acidi ſalis Communis cum Mercurio, in verum Arſenicalem liquorem mutatur.

Sumſi iterum Limaturam Martis recentem, atque hanc, prius igne candefactam detonaui per Sulphur (*f*), reſiduae calci ferreae odorem penetrantiſſimum Sulphureum ſpiranti inſtillaui Acidum vitriolicum per guttas, et ſimul aliquid Acidi Salis addidi. Ortus ſubito eſt odor ſumme faetidus, alliaceo ſimilis, penetrantiſſimus et maxime volatilis, qui vaſto recipiente exceptus, latera eius ſplendido ſulphure, colorem metallicum, aut potius pyritoſo-metallicum habente incruſtauit. Productum experimenti huius ſimile eſt priori; nempe ſpiritus ſulphureus ex terra phlogiſtica ferri atque acido vitriolico productus, ſubactus denique acido ſalis, mutatur in pyritoſum ſulphul metallicum.

Ex his duobus igitur experimentis recte concludi poſſe ſpero, Arſenicum reuera eſſe ſulphur acidi ſalis cum terra phlogiſtica metallica mixti, vel, vt clarius loquar, Arſenicum eſſe Spiritum Sulphuris Communis, vel per Acidum Salis Communis ſolum, vti eſt in pyritis, vel per Sa-

(*f*) Vid. Supra Diſſertationem meam de tractatione metallorum cum ſulphure.

Salem eius medium metallicum ſubactum, digeſtum et in metallicum transmutatum ſplendidum ſtatum.

Ex his nunc Corollarii loco deduco,

I. Non ſolidum tantum, ſed liquidum quoque dari poſſe arſenicum in natura.

II. Omnibus in pyritis metallicis ſpeciem Arſenici reuera reperiri.

III. Propriam ac genuinam Arſenico formam eſſe metallico-ſulphuream.

SCRV-

SCRVTAMEN CHEMICVM CALCVLI ACIPENSERIS HVSONIS SEV BELVGAE.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. 1.

Quum ante aliquod tempus Calculum Acipenſeris Huſonis, qui Ruſſis *Bielugae* nomine venit, a Cel. Collega noſtro D. *Pallas* dono accepiſſem, vt in naturam huius calculi chemice inquirerem, lubens arripui hanc occaſionem conferendi aliquid ad penitiorem cognitionem chemicam corporum ex animali regno deſumtorum et ea inſtitui experimenta, quae nunc Academiae communicare animus eſt. Nihil autem de ſitu calculi in corpore piſcis, ſub vertebrarum ſpina in ipſo, vt videtur, renis parenchymate latentis, nihil de figura incerta ſatis, de conſtructione lamelloſa et ſimul radiantibus quaſi fibris cryſtalliſata praefabor, vtpote quae in *Itinerario Cel. Pallas*

(Vol. I. p. 436. Vol. II. p. 342.) iam expoſita, et propediem ab eodem fuſius cum iconibus calculorum adiectis, expectanda ſunt.

§. 2. Calculus, quem pro experimentis habui, pondus fere ſesquiunciale aequauit. Forma irregulariter ouato-depreſſus, externa facie velut oſſeus, fractura vero verſus centrum Zeolithis inſtar radiatus, colore ex flaueſcenti albo fuit; odore et guſtu omnino caret. Pondus ſpecificum eiusdem, a Cel. Collega noſtro *D. Krafft* exploratum, ad aquam fuit 46. 21 vel 219. 100.

Experimentum 1.

§. 3. Scrupulus pulueriſati calculi per digeſtionem in alcohole vini pondere non imminutus fuit.

Experimentum 2.

§. 4. Semuncia eiusdem pulueris cum aqua deſtillata digeſta aliquoties et extracta, amiſit grana LXXII.

Experimentum 3.

Reſiduum ſiccatum (drachm. ji. gr. XLViij.) cum acidis mineralibus parum efferueſcebat atque facile acido nitri ſoluebatur, nullo relicto reſiduo. Liquori inſtillata ſolutio ſalis tartari, deiecit materiam flaueſcentem, quaſi mucoſam, cuius ſiccatae inueni drachmas duas cum granis quadraginta, quaeque cum acidis feruebat.

Expe-

Experimentum 4.

Prima infuſio aquoſa experimenti ſecundi acidum ſaporem et indolem quoque acidam per reagentia prodidit.

Ex retorta lente deſtillando phlegma purum tranſiit; remanentia vero vnius vnciae flaueſcenti-turbida fuit, attamen in filtro nihil quod libellam moueret, relinquebat.

Guſtum afficiebat hoc reſiduum ſapore ſalino, et chartam caeruleam intenſe rubro tingebat colore.

Spiritu ſalis armoniaci cum ſale tartari parato nubecula excitabatur, absque efferueſcentia.

Solutio ſalis tartari, poſt efferueſcentiam leuem, album deiecit ſedimentum.

Solutio ſachari ſaturni pariter album puluerem copioſe praecipitauit.

Nihil autem in pelluciditate mutauit ſolutio argenti in acido nitri.

Cum oleo vitrioli aliquantum ſelenitis naſcebatur.

Sub euaporatione liquoris ad ſiccitatem vsque, vapores chartas coloratas ſuſpenſas omnino non mutarunt; ſuperfuit ſal ſiccum pondere ſeptuaginta quinque granorum, quod aqua deſtillata denuo ſolutum non potuit in chryſtallos redigi.

Sub tubulo ferruminatorio flammae expoſitum hocce ſal, dimidium ponderis amiſit, tumque fuſione per ſe in formam coactum eſt globuloſam, turbidum et humiditate aëris haud mutandum.

Experimentum 5.

§. 5. Calculi Huſonis puluerati granis decem affudi acidi vitrioli (ex p. 1. ol. vitriol. et p. 3. aqua deſtill.) drachmas tres, quod efferueſcentiam vix conſpicuam excitauit. Per noctem ſic relicta materia calculi tota ſpiculis Salinis quaſi conſita apparuit, quae ſegregari haud potuerunt. Tunc digeſta vsque ad ebullitionem mixtura et refrigerata, denuo acidum calculo ſuperfuſum tenuioris inſtar gelatinae apparuit.

Solutio per filtrum traiecta ab addita ſolutione ſalis tartari non turbata fuit; poſt plures demum horas aliquantum ſelenitis ſubſedit.

Reſiduum a ſolutione tredecim granorum gypſeae indolis erat, et coctione in aqua vndecim grana ſoluta amiſit.

Experimentum 6.

§. 6. Decem grana calculi in drachma acidi nitroſi anatica quantitate aquae diluta penitus, at ſine conſpicua efferueſcentia, nullo adhibito calore ſoluebantur. Saturata dein haec ſolutio per ſolutionem Salis Tartari deiecit ſedimentum album, cuius edulcorati grana decem inueni, quodque cum acidis acriter feruesceb at.

Ex-

Experimentum 7.

Decem grana calculi cum acido ſalis diluto eadem ratione tractata, effectum ſimillimum prodiderunt.

§. 7. Quoad ſiccam tractationem Calculi *Huſonis* ſequentia experimenta inſtituta ſunt:

Experimentum 8.

Quinque grana eiusdem, directae per tubulum ferruminatorium *Bornianum* *) flammae lampadis in cochleari ferreo oppoſita, amiſſis duobus granis, in puluerem cinereum, magneti nulla particula adhaereſcentem, et in acido nitri cum efferueſcentia facile ſolubilem tranſierunt.

Experimentum 9.

Calculi eiusdem crudi grana duo cum aequali quantitate boracis non in ſcoriam igne lampadis verſa ſunt, ſed borax ſolus granulis calculi circumfuſus eſt; duplum boracis, poſt intenſum ignis gradum, cum materia calculi tandem fluxit et in vitrum turbido album, porcellanae imperfectae ſimile tranſiit.

Experimentum 10.

§. 8. Puluerati Calculi drachmas duas in retorta vitrea tanto ignis gradu torſi, vt retorta emollita formam mutaret. Senſim additus calor primum *phlegmatis* inſipidi aliquantulum expellere viſus eſt. Auctiore gradu tranſierunt *vapores aciduli*, qui iſto phlegmati aciditatem concilia-

*) Crell *neueſte Entdeckungen in der Chemie* Vol. III. p. 311.

ciliarunt. In collo retortae ſimul apparuit *Olei empyreumatici* veſtigium aduſtum, quod granum vnum vel alterum aequare videbatur. In extremo tandem collo *puluisculus* adhaeſerat albidus, ſapidus, ſed quantitate nimis exigua, quam vt colligi potuerit. Reſiduum puluerem referebat leuem album, minime cauſticum et qui nullum ſcorificationis indicium prodebat, pondere ſesquidrachmae exactae.

Experimentum 11.

Reſiduum illud ipſum cum acidis parum efferueſcebat. Granum vnum a ſalis acido facile ſolutum vidi. Reliquum coctione in aqua ſalinitatis indicia dedit, vnde denuo maiore quantitate aquae extraxi; quo grana duodecim ſoluta ſunt.

Experimentum 12.

Aqua ſolutione imbuta leni euaporatione magis magisque acida euaſit; oleum vitrioli aliquantulum ſelenitis inde praecipitauit. Ad ſiccitatem coactum ſedimentum grana duodecim pondere aequauit et ſimillimum fuit illi, quod Experimento decimo e cruda Calculi materia obtinui.

Experimentum 13.

Suſpicione acidi phoſphorei in ſalino principio Experimentorum decimi et duodecimi latentis excitatus, omnem collectam quantitatem, quae grana octuaginta quinque aequauit, immiſcui duobus drachmis pulueris carbonum, idque in retorta vitrea, crucibulo arena repleto impoſita

poſita et excipulo vncias duas aquae deſtillatae continente munita, trihorio, per gradus aucto igne vsque adeo candeſceci, vt vitrum retortae emollitum ſubſideret. Vidi ſub initium deſtillationis aliquod guttas limpidas exſtillantes; ſecuti dein vapores, qui auctiore calore in retortae quidem cavo nebulae phoſphoreae inſtar apparuerunt; at in collo retortae haud inconſpicuo lumine lucebant. Aqua excipuli flaueſcenti-turbida facta, ſaporem et odorem acidi ſulphuris volatilis prodebat, reagentibus idem annuentibus. Itaque calor, quo vitrum retortae mollitum eſt, expellendo phoſphoro non ſuffecerat.

Experimentum 14.

§. 19. Reſiduum a coctione Experimenti vndecimi, cuius pondus drachmam et quindecim grana aequabat, nullas particulas ferreas edidit, cum acidis vero lente et diu ferueſcebat. Indolem terrae exploraturus omne illud reſiduum in ſpiritus ſalis ſemuncia, triplo aquae deſtillatae diluto, ſolui, quod etiam ſine calore optime ſucceſſit. Inde per ſolutionem ſalis tartari praecipitata terra ſordide alba, quaſi lutulenta, poſt edulcorationem ſeptuaginta granorum pondus aequauit et cum acidis tunc pigre efferbuit. Nulla igitur terra ſilicea adfuit; ſed ne argillacea, ſi adforet, lateret.

Experimentum 15.

Quod reliquum erat, methodo *Bergmanniana* candeſeci, vt argillacea pars dureſcens minus redderetur ſolubilis. Poſtea affudi aceti deſtillati tres vncias et digeſſi leniter, ſolutionem vero filtro traiectam adfuſa ſolutione ſalis

ſalis tartari turbaui, vnde praecipitatum mere calcareum, ſexdecim omnino granorum pondere prodiit. Attamen reliqua terra cum acidis mineralibus adhuc efferbuit, multaque aceto addito omnis ſoluta eſt. Aliis quoque periculis mihi quidem terrarum primigeniarum analyſis hac methodo non ſucceſſit.

Experimentum 16.

Terram in Experim. XV. aceto non ſolutam denuo acido ſalis diluto ſoluebam, cui ſolutioni tamdiu caute et lente inſtillaui oleum vitrioli, donec ſeleniticam omnem materiam praecipitem egiſſem, cuius ablutae pondus fuit drachmae et quadraginta quinque granorum. Liquor reliquus ſimul cum aqua abluendo ſelenitoſo ſedimento adhibita, pauco addito ſale tartari ſaturatus et euaporatione deſiccatus, magma ſalinum viginti duo granorum ſuppeditauit.

Hoc denique magma, aqua reſolutum, tredecim grana reliqua fecit, ſedimenti flaueſcentis, quod partim tartaro vitriolato conſtabat; alumen vero in ſolutione exiguis cryſtallis concreuit.

Experimentum 17.

§. 10. Superfuere a recitatis experimentis tres adhuc drachmae calculi *Hu'onis*, quas ſecundum formulam *Gahnii* *) tractaui, vt phoſphorum extorquerem. Solui primum materiam calculi in vncia acidi nitroſi, tribus aquae

*) Crell *Chem. Iournal, I. p.* 24.

aquae deſtillatae vnciis diluta; dejeci terram calcaream omnem, inſtillata ſenſim ſemuncia olei vitrioli. Liquor reliquus ad ſiccitatem reductus, durante euaporatione floccorum forma adhuc ſelenitis reliquias dimiſit. Reſiduum fuit magma nigricans, multo acido vitriolico graue; calore auctiore ad ſiccitatem perductum, fumos vitriolicos ſpiſſos efflauit, tumque in ſcoriam fluxit, cuius quadraginta grana corradi poterant, decem vero in crucibulo remanſiſſe videbantur.

Scoriam hinc enatam cum ſesquidrachma pulueris carbonum, in crucibulo tecto prius igniti, remixtam et addita aqua in paſtam redactam, in globulos efformaui, atque hos in retortam vitream immiſſos, vt experimento decimo narratum eſt, ſuppoſito crucibulo arena pleno et addito excipulo cum aqua, vsque ad ſubſidentiam vitri retortae candefeci, perque quadrihorium ſummo, quem vitra ferunt, calore torrui. Nubeculae lucidae iterum apparuerunt; ſed ne tum quidem phoſphori quidquam tranſiit. Aqua excipuli flaueſcebat et odorem induerat ſulphureum acutum, non ingratum, explicite acida.

§. 11. Experimentis recenſitis colligitur Calculum acipenſerinum eſſe ſubſtantiam naturae oſſium analogae et quaſi neutroſalinam, cuius duas tertias fere partes conſtituit terra oſſium ſeu calx animalis, reliquum acidum eſt phoſphoreum (Exp. III. IV. XI. XIV.). Si accuratiorem elementorum expoſionem vellis, erunt in vncia vna calculi:

 1. Terrae

1. Terrae calcareae purae drachmae duo gr. xxiv. per Exp. II. X. XVI.

2. Terrae argillaceae grana vij. ad x. per Exper. XVI.

3. Acidi phoſphorei drachmae ijß. ad iij, per Exp. III. IV. XIII. XVII.

4. Phlegmatis aquoſi circiter drachma, Exper. X.

5. Empyreumatis a glutinoſa materia calculi, circiter grana vj. vel viij. per Exper. X.

Praetereaque aër, quem calculi et ſubſtantiae animalium omnes continent fixum, inſtitutis experimentis noſtris non ad ſcrutinam reuocatum.

DE

DE CALCVLO EX ACIPENSERE STVRIONE EXEMTO.

Auctore

N. OSERETSKOVSKY.

Anno 1783 hyemanti mihi in vrbe Aſtrachan non paucos videre contigit calculos, qui diuerſis temporibus ex diuerſis Acipenſerum ſpeciebus a piſcatoribus fuere exemti et in vrbem allati, ibique apud opulentos mercatores et apud praefectos vrbis inter raritates conſeruantur. Omnes illi calculi, quotquot vidi, variabant inter ſe forma, colore, magnitudine et pondere. Omnium, quos vidi, maximus, ex Huſone exciſus, erat vnciarum circiter octo, colore fuscus, ſcabriusculus atque adeo compreſſus, vt inde euaſerit latiſſimus. Hunc a poſſeſſore, qui calculos ſuos non inferiores eſſe putabat lapidibus bezoardicis, obtinere non potui; obtinui autem alium, priore multo minorem, quem nunc deſcribere decreui, et qui in Acipenſere Stu-

 rione

rione inuentus fuiſſe dicebatur; id quod vnicum fere collectoribus calculorum et notum eſt. Ignorare enim ſeſe fatentur, in quo viſcere apud Acipenſeres talia concreta reperiantur, reddunt que rationem, quod ipſi piſcatores pro domicilio calculorum nunc haec nunc alia aſſignent loca, et rariſſime in eo inter ſe conueniant. Sic anno 1769 relatum fuit Celeb. *Pallas* ad mare Caſpium, quod calculi Huſonum conſtanter occurrerent in ſinubus aperturae ani adiacentibus, qui ab inteſtini recti parietibus efformantur. Aſt anno 1770 D. *Sokolow*, huius Academiae Adiunctus, ibidem a piſcatoribus accepit, quod calculi illi deprehenderentur ſemper in corporibus Huſonum iuxta ſpinam dorſi, in carne glanduloſa, renes horum piſcium conſtituente, intra peculiarem cuticulam, quae glanduloſam illam carnem inueſtit. (*)

Ex iſta relationum diuerſitate de loco natali calculorum hucusque nihil certi ſtatui poteſt; attamen concludere licet, quod illi non conſtanter in vno eodemque inueniantur viſcere, ſed quod piſcatores in variis eos reperiant partibus, et idcirco hac in re ſibi inuicem contradicant. Vnde itaque fuerit depromtus meus calculus, decidere non poſſum; nec audeo aſſeuerare, eum ad genitalia ſturionis (maris) repertum fuiſſe, vti priſtino eius poſſesſori a piſcatoribus fuit traditum. Accedo igitur ad ipſum calculi examen, quod a deſcriptione habitus externi ſum inchoaturus.

Pon-

(*) Cel. Pallas in ſuo itinere per Ruſſiam parte I. p. 436. parte II. p. 342.

Pondus calculi drachmarum ſex cum duobus ſcrupulis; color albus cum admixta leuiſſima flauedine, quae diſparet ſtatim ac calculus cultello leniter deraditur; ſuperficies glabra, inaequalis; figura oblonga, ad conoideam quodammodo accedens, altero apice tenuiore, altero latiore, diuiſo in duas protuberantias, inter quas hiat rima ſatis profunda, a qua calculus verſus apicem tenuiorem in gibbum quaſi erigitur, et conuexitatem efficit, quae in medio calculi, ſi nimirum is ab apice bipartito ſpectetur, paulisper depreſſa apparet; aſt eo craſſiores atque altiores inde euadunt calculi apices, quorum tenuior ad latus ſiniſtrum, in ſupradicto calculi ſitu, ſulco lato atque profundo in longum eſt exaratus; inde dextrum huius apicis latus ſupra ſiniſtrum notabiliter eminet. Inferior calculi ſuperficies eſt plana, ad vtrumque apicem depreſſa, in medio gibboſa. Margo lateris ſiniſtri, quando calculus inuerſus iterum ab apice eius bifido inſpicitur, paulisper eſt intropreſſus; hinc latitudo calculi eo in loco fit minor; maxima autem eius latitudo eſt prope apicem bipartitum, vbi fere ad integrum pollicem illa extenditur. Longitudo calculi ſesquipollicem excedit.

Fig. I. ſuperficiem calculi conuexam ſiue ſuperiorem naturali magnitudine repreſentat. Tab. IV.

Fig. II. ſiſtit ſuperficiem eius planam ſeu inferiorem.

Artificioſa calculi figura vtrum proueniat a fortuita materiae depoſitione et concretione, an debeatur loco, in quo calculus continebatur, et cui creſcendo adaptari pote-

 rat

rat, altioris indaginis res eſt, quae tamen dilucidari aliquomodo poſſet, ſi mihi locus calculi natalis fuiſſet cognitus; deſtitutus autem hacce notitia abſtineo me ab omnibus coniecturis atque ſpeculationibus, quibus disquiſitio illius quaeſtionis anſam praebere poſſet. Tranſeo itaque ad examinandam calculi ſtructuram internam, quae vt pateret, ſerrula eum transuerſe diſſecui, et ſub hoc opere ſatis virium adhibere debui, valde enim durus erat calculus; aſt quum ſerrula plus quam ad mediam eius profunditatem peruenit, remoui hoc inſtrumentum, et cuneo in fiſſuram ſerrula factam immiſſo, facili negotio in duas partes illum diffregi. Apparuerunt tum bini ſuperficiales orbiculi ſeu circelli, corticem quaſi calculi conſtituentes, qui in ſuperficie eius conuexa, verſus apicem in duo tubera diuiſum, interiacente lineola euidentiſſime a ſe inuicem erant diſtincti, et exterior circellus interiorem craſſitie aliquantum ſuperabat; aſt circelli hi verſus latera calculi ſenſim decreſcebant, et tandem in ſuperficie eius complanata in vnum confluxerunt. Interior calculi ſubſtantia, ſub memoratis mox inuolucris, etiam circulatim erat diſpoſita; ſed circuli interni lineolis non ita conſpicuis inter ſe erant ſeparati; attamen non ſolum armato, verum etiam nudo oculo lineolae illae conſpici poterant. In centro horum circulorum, multo propiore ad ſuperficiem calculi complanatam quam conuexam, in conſpectum prodiere, in fruſto calculi tuberoſo, ſtigmata duo rotunda, parum inter ſe remota, ſibi inuicem oppoſita et, prae reliqua calculi ſubſtantia, albidiore atque teneriore materie repleta; in fruſto autem calculi tenuiore ſimilia duo ſtigmata, in eodem tractu iacentia, prioribus correſpondebant, et in illaeſo calculo fuere illis contigua atque continua. Interiori horum ſtigmati ad-

adiacebat foueola, repleta ſimili materie, cuius aliqua pars, ſub actione ſerrae, foras excidit, foueolam que illam aliquatenus vacuam reliquit. Ima pars calculi, vbi ſerra ſubſtitit, et quae cuneo erat disrupta, pulcherrimum viſui obtulit ſpectaculum; apparuit enim ſubſtantia calculi compoſita ex tenuiſſimis ſpiculis ſeu radiis, qui non modo erant albiſſimi, ſed etiam inſtar cryſtallorum ſalis ſplendeſcebant, talis que eorum fuit diſpoſitio, vt ab omni peripheriae puncto, in decurſu ſuo, ad centrum calculi coniunctiſſime dirigerentur.

Fruſtum calculi tenuius, in quo apparuit ſupradicta foueola, ſerrula per mediam longitudinem inciſum, et poſtea cuneo diffractum, patefecit nucleum in centro contentum, qui magnitudine ſua ſemen hordei aliquantum ſuperabat, et obductus erat flauicante pellicula, quae materie alba et quodammodo grumoſa fuit infarcta. Nucleus iſte non vbique erat rectus, ſed apex eius interior, qui ſerrula auulſus memoratam reliquit foueolam, ad latus calculi fuit incuruatus. Ad hunc nucleum, tanquam ad ſuum centrum, omnia calculi ſpicula vndiquaque collineabant, atque ſic clare oſtendebant, quod exiguum hocce primordium, centro calculi incluſum, in corpore Acipenſeris prius fuerit formatum, vel eo foris delatum, quam omnis reliqua calculi ſubſtantia, quae nucleum illum omnino pro ſuo habuit fundamento, ei que iam formato pedetentim accreuit, ſimili certe ratione, ac contingit in corpore humano, vbi minutiuscula ſolidorum corporum fragmenta, idoneo loco depoſita, generationi ſtupendae magnitudinis calculorum occaſionem creberrime ſubminiſtrant, et moleſtiſſimis naturae humanae concrementis pro matrice inſeruiunt.

Cal-

Calculorum, qui in corporibus Acipenſerum reperiuntur, habitum externum maximopere variare, iam antea dixi; pro diuerſa autem figura externa internam quoque eorum fabricam aliter atque aliter ſore comparatam, nullum eſt dubium. Itaque deſcriptio haec nulli calculo, praeter praeſentem, exacte conueniet; ſed quot occurrent calculorum ſpecimina, tot etiam deſcriptiones confici poterunt. Vt autem innoteſcant proprietates, omnibus eiusmodi concrementis communes, non vnus vel alter, ſed plures tales calculi chemice ſunt examinandi; ſola enim criteria chemica relationes eorum ad menſtrua et horum ad illos oſtendere, atque ſic intimam calculorum conuenientiam ſeu diſcrepantiam reddere valent certam atque perſpectam. Hunc in finem cum deſcripto nunc calculo aliqua feci pericula, quae, vt comparari poſſint cum aliorum experimentis, fideliter hic enarrabo.

Experimentum 1.

Albiſſimo pulueri, quem ſerrando meum calculum obtinui, affudi acidum vitrioli; nulla ſub hac commixtione orta eſt efferueſcentia, et puluis breui mora ad fundum vitri ſubſedit, manſitque albiſſimus. Lenis calor huic miſcelae applicatus ſtatum eius neutiquam mutauit; additio aquae pro diluendo acido vitriolico, forſan nimis forti, vt putabam, nullum produxit effectum, nullisque adminiculis acidum hoc ſuſcitari potuit, vt in puluerem ageret; id quod iteratis tentaminibus probe cognoui.

Experimentum 2.

Acidum nitri eidem pulueri affuſum illico eum in grumulos coëgit, cum que nimis forte videretur, additis

ali-

aliquot aquae guttis illud diluendum curaui; quo facto ſtatim grumuli illi diſparere coeperunt, et placide menſtruum hoc ſubiere, absque vt vlla efferueſcentia ſub hac ſolutione fuerit exorta. Addidi eidem ipſi acido nouam pulueris portionem, quam momento etiam abſorbuit, oculisque ſubripuit. Perrexi admiſcere puluerem, quousque ab acido recipiebatur; obſeruaui tandem nubeculam in liquore ſuſpenſam, quae menſtrui vires iam eludebat; aſt ab affuſo nouo acido nitri mox diſparuit. Lenis calor actionem menſtrui in calculoſam hancce materiem valide accelerabat.

Experimentum 3.

Animaduerſa acidi nitri in puluerem calculi actione tentaui idem experimentum cum integro eius fruſtulo, cui acidum nitri ſuperfudi; et cum nullam mutationem calculus experiretur, addidi portiunculam aquae pro diluendo acido, quod nimis forte eſſe priori experimento cognoueram; ſed ne hoc quidem adminiculum vires menſtrui in ſoluendum actiuas reddere potuit; ſubſidio autem fuit furni calor, qui deſideratum produxit effectum; ſtatim enim ac calefactum erat menſtruum, exiguae bullae ex calculo in ſuperficiem liquoris prorumpere coeperunt, eoque magis augebantur, quo plus incaluerat menſtruum. Hinc volumen calculi euidentiſſime imminuebatur, et breui temporis ſpatio totum diſparuit fruſtulum. Sub hac ſolutione in ſuperficie liquoris albida colligebatur ſpuma, in quam reſoluebantur bullulae ex calculo erumpentes, et quae peracta operatione penitus diſparuit, relictis tantummodo quibusdam flocculis liquori innatantibus, quos denuo applicatus calor menſtruum perfecte ſubire coegit.

Experimentum 4.

Aliud calculi fruſtulum immerſi in acidum ſalis communis, cum quo vitrum apertum prunis admoui; a calefacto acido compoſitio calculi illico caepit penetrari, ita vt hoc acidum validius quam acidum nitri calculum aggredi videretur. Aſt peracta ſolutione, quae iisdem plane phoenomenis ac in priori experimento comitabatur, refrigeratus liquor dimiſit ex ſe partem ſolutae ſubſtantiae, quae in nubeculas collecta et per omnem liquorem diſperſa turbidum reddidit menſtruum, atque in illo per aliquod tempus ſuſpenſa tenebatur; mora autem ad fundum vitri delapſa eſt.

Experimentum 5.

Vt viderem, num idem acidum ſalis, quod portionem ſolutae calculoſae ſubſtantiae ſponte de ſe dimiſit, aliud calculi fruſtulum diſſoluere poſſet, repetii experimentum iniecto ſolutioni illi nouo fruſtulo, quod, ſub iisdem conditionibus, perfecte fuit ſolutum. Refrigerata autem ſolutio, nychtemeri ſpatio, inſignem copiam ſubſtantiae albae, puluerulentae ad fundum vitri depoſuit, et ipſa albidum nacta eſt colorem, quem diuturno etiam quiete nequaquam amiſit. Color iſte manifeſto fuit indicio, in omni liquore ſimillem contineri materiem, qualis ad fundum vitri ſponte ſeceſſit. Pro praecipitando igitur ſoluto ex ſoluente inſtillaui huic ſolutioni oleum tartari per deliquium; inſignis orta eſt efferueſcentia, quae magnam copiam viſcidae ſpumae in ſuperficiem liquoris eiecit, et multos floccos inſtar niuis ad fundum vitri praecipitauit. Saturatum tandem acidum leniter decantaui a praecipitata ſub-

ſubſtantia, cui aquam ſuperfudi, vt abluerentur particulae ſalinae, quas guſtus in ea deprehenderat. Ablutam diligenter leni calore exſiccandam curaui, vt aptam redderem ad tentamina cum ea inſtituenda.

Experimentum 6.

Oleum tartari per deliquium, inſtillatum ſolutioni calculi, in acido nitri factae, inſignem produxit efferueſcentiam, ſed nihil exinde praecipitauit.

Experimentum 7.

Poſtquam praecipitata ex acido ſalis communis calculoſa materies fuit exſiccata, cum omnibus ſupradictis acidis eodem plane modo ſe geſſit ac memoratus iam calculi puluis; in acido vitrioli non ſoluebatur; in acidis vero nitri et ſalis licet ſolutio locum habuerit, absque vlla tamen efferuerſcentia; in oleo tartari per deliquium nec ſolutionis nec etiam efferueſcentiae vlla edidit ſigna; prunis inſperſa ſtatim albidum ſuum colorem in fuſcum permutauit, et leuem foetidum dimiſit odorem, quo expulſo denuo facta eſt albicans. Talem ſe etiam exhibuit ad ignem abraſus a calculo, cum acidis non tractato, pulviſculus, ea tantummodo cum differentia, quod prae illa materie, ex acido ſalis praecipitata, aliquanto foetidiorem de ſe ſparſerat odorem. Fruſta calculi prunis impoſita, dum nigreſcebant, adhuc validius ſimili odore nares feriebant, ita vt totum conclaue graui piſcino foetore inde fuerit infectum. Foetor autem ille tamdiu prodibat, quamdiu fruſta illa ſuper prunis nigro gaudebant colore, quo exuſto odor etiam ille exhalare ceſſauit, et continuata vs-

tione portiones calculi ex duris, quales ante calcinationem fuerunt, factae ſunt valde fragiles, atque ſub comminutione ingentem dederunt pulueris copiam, quantam in minutis fruſtulis nequaquam adeſſe crederes.

Experimentum 8.

Puluerem combuſti calculi commiſcui primo cum acido vitrioli; nullam prodixit efferueſcentiam, nullum que alienum colorem acido conciliauit; ipſe autem ex griſeo factus eſt albidus, et ad fundum vitri ſubſedit; dum vero ſpatula lignea permiſcebatur cum menſtruo, et quamdiu in eo ſuſpenſus tenebatur, ſemper lacteo illud tinxit colore; praeterea nullam neque acido induxit nec ipſe paſſus eſt mutationem.

Secundo idem puluis cum acidis nitri et ſalis ſeorſim ſumtis commixtus ne minimum quidem excitauit motum, nec totus in illis eſt diſſolutus; ſed dimidia circiter eius pars, nigrum colorem nacta, ad fundum vitri eſt delapſa; altera autem pars menſtrua ſubiuit, ea que fuſco abſcurauit colore.

Haec ſunt experimenta, quae cum calculo meo repetitis vicibus feci, atque ita cognoui, in quibus menſtruis quibus que cum phoenomenis calculus ſolueretur; hoc autem voto potitus tentaui eundem explorare ad nudum ignem, qui praeſentiam foetidi olei in calculo aperte manifeſtauit, ipſam que naturam ſubſtantiae ſeu terrae calculum conſtituentis adeo immutauit, vt in ipſis illis menſtruis, quae crudum calculum perfecte diſſoluebant, exuſta eiusdem ſubſtantia non niſi parce admodum ſolueretur.

retur. Hinc patet, in recenti ſeu crudo calculo adfuiſſe aliquem proxenetam, cuius interuentu integra eius fruſta in acidis nitri et ſalis penitus diſſoluebantur; quo vero per ignem ablato calculoſa materies priſtina ſua menſtrua ſubire renuebat. Ex foetido autem odore, qui de calculo emanabat, dum iſte comburebatur, pronum eſt colligere, quod animales quoque humores ad formandum calculum ſuam contulerint ſymbolam.

Aſt licet pars aliqua humorum animalium compoſitiorem calculi ingrediatur, exinde tamen induci non poteſt, geneſin calculorum in corporibus acipenſerum morboſae alicui fluidorum corporis craſi deberi; quippe quae nullis obſeruationibus hucusque eſt demonſtrata, et piſcatores non niſi eos acipenſeres reperiunt macilentos ac languidos, qui a calculo iam formato et nobile atque anguſtum viſcus occupante incommoda patiuntur. Ratio igitur originis calculorum non in conſtitutione humorum corporis piſcini, ſed potius in ipſo elemento, quod animalia haec inhabitant, eſt quaerenda; id que eam praecipue ob cauſam, quod non in ſolo genere acipenſerum concrementa iſta occurrant, ſed obnoxii illis ſint etiam Carpiones, qui in mari Caſpio et maximi et copioſiſſimi ſunt; imo laborant calculis ipſi Apri, qui in denſis atque vdis arundinetis ad mare illud habitant. Turbida nempe et limoſa aqua, in arundinetis ſtagnans, quam bibunt Apri, iam continet in ſe terreſtrem materiem, generandis calculis aptam, quae ad veſicam delata vrinariam, vbi calculi aprini ſemper ſolent nidulari, facile poteſt in durum concreſcere corpus. Eodem modo generari poſſunt calculi in Acipenſeribus atque Carpionibus, qui omni anno per aliquot

 menſes

menſes et praeſertim hybernos neque in mari natant, neque in fluuios aſcendunt, ſed infinito numero in profundo maris congregantur, et turmatim in vno eodem que loco per longum temporis ſpatium immobiles quaſi quieſcunt; id quod piſcatoribus eſt notiſſimum. Sub diuturna iſta quiete naſcuntur omnino eorum calculi ex tenaci limo, quem continuo hi piſces cum aqua deglutiunt. Aqua enim maris Caſpii notabiliter eſt turbida; turbidior certe quam in mari Baltico, Albo, Glaciali et aliis, quae videre mihi contigit. Haec chemice examinata oſtenderet forte contenta, ſubſtantiae calculorum analoga. Denique cum ipſi illi piſces, ac praeſertim Carpiones, in aliis aquis immunes uiuant ab eiusmodi concrementis; euidens eſt, aquam maris Caſpii foetam eſſe materie, quae incolas eius calculis reddit obnoxios.

OPTI-

OPTIMA METHODVS PARANDI AMALGAMA CVPRI.

Auctore
NICAETA SOCOLOFF.

Cuprum omnium metallorum, poſt regulum antimonii atque ferrum, difficillime ſoluitur in mercurio, et nec niſi protracta coctione ac ſedula trituratione in amalgama conuerti poteſt; verum idem metallum, ſolutum in acidis quibusdam mineralibus, poſtquam ex iis per intermedium certorum metallorum, nempe ferri, vel zinci aut ſtanni fuerit praecipitatum, multo maiorem acquirit cum mercurio affinitatem, et facile ab eo penetratur. Singularis huius mutationis praecipua cauſa videtur eſſe attenuatio atque phlogiſtica materia, ex ſolutionibus dictorum metallorum per acida, ſub ſpecie fluidi elaſtici copioſe exhalans, quae in praecipitata illa Cupri Calce ſeſe figit, ſoluit eius mixtionem, et transformat denique eam in metallico-regulinam ſubſtantiam. Hinc ſit, quod ſub praecipitatione cupri, tam ferri quam

quam Zinci ſolutiones absque notabili fere peraguntur efferveſcentia, quae alias ab acido vitrioli cum ferro, et acido ſalis cum Zinco maxima fieri ſolet.

Multi Chemicorum, ob dictam praecipitati per metalla cupri affinitatem cum mercurio, in praeparatione amalgamatis huius metalli, pro facilitanda procul dubio operatione, ſubſtituendum illud ſuadent cupro vulgari. Si autem rem ipſam experiri velimus, multa pariter hic obſtacula atque incommoda reperiemus, quae ſucceſſum operationis vel retardant atque impediunt, vel penitus impoſſibilem reddunt Nam praecipitatum illud metallis ſuis praecipitantibus firmiter plerumque adhaeret, a quibus pure ſeparari vix poteſt; additus autem mercurius cum praecipitato, tum praecipitanti metallo aequaliter vnitur, et ita vtrumque magis confundit; obrutum praeterea a ſalibus metallicis, mora temporis, ſi paulo diutius in iis relinquatur, fit aeruginoſum et ad amalgamationem ineptum; denique a vaporibus ſulphureis acribus, quibus eſt expoſitum, impurum redditur.

His itaque incommodis ſubuenire cupiens, non inutile fore puto, ſi certam deſcribam hic methodum, qua praecipitati cupri amalgama facile et magna ſatis quantitate parari poteſt.

Authores vbi de praecipitato loquuntur cupro, plerumque ſolutionem eius in acido vitriolico ſiue vitriolum caeruleum, per ferrum ſimpliciter decompoſitum intelligunt. Nam per reliqua metalla ex hoc acido non tam bene et perfecte ſuccedit praecipitatio. Certum autem eſt, ex mixtione acidi vitriolici cum ferro ſulphureos acerrimos oriri vapo-

vapores, qui vt omnibus aliis metallis, ita cupro quoque maxime ſunt noxii; idcirco praecipitatum illud pro puro et ſincero metallo minime reputari debet.

Solutionem Cupri in acido ſalis, quae variis cum metallis pariter dat metallicum praecipitatum, cuius ſolus Illuſtr. *Vallerius* *) breuem ſemel fecit mentionem, nemo videtur rite examinaſſe, quia hoc menſtruum immediate per ſe exiguam in id habet actionem. Verum me haec ipſa ratio docuit, ſi parua acido huic eſt affinitas cum Cupro, eo meliorem eorum ſeparationem facilioremque fieri praecipitationem, et purius ſinceriusque obtineri debere praecipitatum.

Experimentum I.

Accepi itaque Vitrioli Cupri venalis certam quantitatem, ſolui illud in ſufficienti copia aquae feruidae, ſoluto aequale fere adieci pondus florum ſalis ammoniaci, ac pro ratione, qua hoc ammoniacum ſoluebatur, caeruleus vitrioli color in viridem mutabatur, ac denique tota ſolutio pulchre praſei coloris eſt facta, perfecteque limpida manſit. Poſtquam dimidiam circiter horam ſtetit in quiete, immerſi ei fruſtum puri ſtanni, quod eodem fere momento ſenſibiliter nigreſcere caepit, et per quadrantem horae tenerrima, vix laeuiſſime inter ſe cohaerente cruſta ſpongioſa obſcure fului coloris totum fuit obductum. Exempto eo caute ex liquore, ab exigua concuſſione, cruſta illa praecipitati cupri ſponte fere tota ab illo ſeparata fuit, quam ſpathula, inſtar pulticulae, cum mercurio miſcendo, in purum et perfectum facil-

*) *phyſiſcher Chemie zweiter Theil, dritte und vierte Abhandlung*, cap. 22. §. 6.

facillime ſubegi amalgama, mollitie aureo ſimillimum. Continuata inmerſione puri ſtanni perfecte totum dicto modo ex ſolutione ammoniacali praecipitatum eſt cuprum.

Experimentum 2.

Similibus cum ſale ammoniaco factis ſolutionibus Cupri iniectum politum ferrum, atque fuſum Zincum, colore quidem multo rubicundiora, reliquis autem notis perfecte eadem producunt praecipitata, quae ſimile quidem priori dant amalgama, ſed cum mercurio paulo citius coire videntur.

Experimentum 3.

Vitriolo cupri caeruleo ſufficienter aqua diluto, vt prius, loco ſalis ammoniaci, adieci aequale pondus ſalis culinaris, atque ſpathula lignea agitaui, vsque dum ſal totum fuit ſolutum. Breuiſſimo poſt iniectionem ſalis tempore, omnis liquor laete viridem aſſumſit colorem, laeui ſuperficiei ſupernatante ſpuma. Repoſitus aliquamdiu in quietem ad fundum vitri depoſuit aliquot longas craſſasque criſtallos ſalis mirabilis Glauberi. Hunc deinde liquorem diuidi in tres partes aequales, quarum vni ferrum, alteri Zincum, tertiae ſtannum inieci. Zincum euidenter maiore reliquis cum efferueſcentia ſoluebatur, atque interea ſenſim ſeſe praecipitans cuprum ſuperficiem eius cingebat cruſta tumida, ſpongioſa, ſuperiori ſimilis, ſed tenacior et maiorem conſiſtentiam habens, coloris ferruginei. Haec demum ad certam aucta molem, ſponte in liquore ab eo ſecedit, intus concaua, figuram ſemi-metalli perfecte impreſſam habens, atque rupta denique diuerſis flocculis nunc ad ſuperficiem liquoris aſcendit, nunc iterum ad fundum delabitur. Extracta

ćta ex liquore et mercurio oblata, omnium auidiſſime ab eo recipitur, atque omnibus notis perfectum optimumque cum eo format amalgama. Liquor ſalinus poſt totalem cupri praecipitationem remanet limpidus, quem additus mercurii ſublimati corroſiui puluis in lacteum mutat, et praecipitat copioſam albam calcem, cui ſimul aliquid ſemper nigri pulveris, a remanente ſine dubio cupri portione, eſt intermixtum.

Per Ferrum ex ſupra dicta ſalino-acida ſolutione cupri, praecipitatio aeque fere bene ſuccedit, ac per Zincum. Efferueſcentia autem hic nulla, ſed odor quidam faetidus, ſingularis exhalare obſeruatur. Praecipitatum cupreum colore dilute rubro gaudet, inſtar fere haematitidis cultro raſi; a metallo praecipitante facile ſeparatur, et in mercurio ſatis bene ſoluitur; ſed multo ad tactum durius atque rigidius eſt priori.

A ſtanno denique praecipitatum cupri fit praecedentibus paulo deterius, quod ei tenacius aliis adhaeret, colore primo rubrum, deinde brunneum fit, et cum mercurio pro parte tantum amalgamatur, liquor eius a praecipitatione reſiduus cum mercurio corroſiuo lacteſcit, vt de liquore Zinci eſt dictum.

Haec experimenta luculenter demonſtrant, praecipitatum cupri ab acido ſalis cum metallis, multo purius, ſubtilius et ad amalgamationem huius metalli parandam omnibus aliis aptius reddi.

De proprietatibus amalgamatis cupri hoc modo parati, ſequentia notari merentur.

A Frigore, vt omnia alia amalgamata, indureſcit, preſſione vero et trituratione incaleſcit et molle tactu euadit.

In igne decrepitat, et deſtillationi ſubiectum exploſionem vaſorum cauſare poteſt.

Ab acido vitriolico et acido ſalis non ſoluitur, ſed indureſcit. Acidum autem Nitri ſumma cum efferueſcentia illud aggreditur, et dum peragitur ſolutio, fumos denſiſſimos, igneos ac ſuffocantes emittit; ſolutio haec adeo perfecta eſt, vt maxima aquae diluta quantitate, quin alcalinis quoque mediocri manu adiectis, vel nullum plane, vel per exiguum det praecipitatum.

Vtrum noſtrum amalgama, aeque ac amalgama argenti, aliquod ſpecifici ponderis acquirat augmentum, nondum determinare pro certo poſſum.

Expreſſo per alutam omni ſuperfluo mercurio, ſi hoc amalgama Nitro in crucibulo fluenti iniicitur, nullam omnino producit detonationem, ſed cum ſtrepitu ad fundum Nitri delabitur; immediate in crucibulo igni fuſorio expoſitum non funditur, ſed inſtar carbonis, expulſo mercurio, atrum euadit, caeterum immutatum fere manet. Hoc modo exuſtum cum acido vitrioli fortiter efferueſcit, caeruleum dat liquori colorem, penitus autem in eo non ſoluitur.

MAR-

MARMORVM QVORVNDAM
IMPERII ROSSICI
ANALYSIS CHEMICA.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. 1.

Inter mineralia corpora per orbem terrarum late diſperſa, non vltimum ſane locum ſaxa calcarea occupant, vtpote quae vbiuis fere occurrunt, ob omnibus facile dignoscuntur et in varios vſus trahuntur. Varietas durior, multicolor, polituram admittens, quae nomine *Marmoris* venit, lippis et tonſoribus nota, ab omnibus fere peregrinatoribus ſedulo inquiritur et notatur, nec eos quidem fugit, qui nulla reliquum ſcientiae naturalis cognitione gaudent: *Quoto enim loco non ſuum marmor inuenit?* Plinius inquit. Chemicorum vero induſtriam baſis calcarea corporum vel terra primitiua huius generis et calx viua magis, quam lapidis calcarei crudi examen excercuit; quo partes peregrinae immixtat eruuntur. Pauci ſaltem de eo ſolliciti fuerunt vt

particulari tractatu mixtionis differentias exponerent; alia quamuis occaſione paucis verbis rei mentionem iniecerint.

§. 2. Notum eſt, varios naturae ſcrutatores, tam antiquiores, quam recentiores transmutationem quandam corporum, metallorum et terrarum primitiuarum aſſerere, et tranſitum ſic dictum vnius terrae in alteram, argillae inprimis et calcis in ſiliceam, et vice verſa, contendere, Marmora, quae chalybe percuſſa ſcintillant, ad eorum mentem in ipſo opere transmutionis deprehenſa et in biuio inter calcem et ſilicem conſtituta ſunt. Huius indolis varia marmora imperii roſſici ſunt, quorum ideo accuratius examen vt inſtituerem nuper deſiderauit celeberr. Academicus D. *Ferber*, cum ſua de transmutationibus corporum mineralium, cogitata cum academia imper. Scientiarum communicaret. (Act. Acad. Petrop. Tom. V. vol. 1.) Si nimirum tranſitus quidam terrae calcareae in ſiliceam re ipſa locum habet, neceſſe eſt, vt marmora hanc mutationem ſubeuntia vel ad dimidium paſſa, ob mediam quaſi naturam peculiaribus proprietatibus gaudeant, quae nec calcareo puro, nec ſilici competunt; neceſſe eſt vt inter ſe diſcrepent hac proprietates pro gradu diuerſo transmutationis plus minus perfectat, ſi vero ambae hae terrae in ſtatu puro et immutato ex illis marmoribus elici et ſeparari poſſunt, inter ſe tantum commixtae fuerunt et omnis transmutationis idea fictitia et erronea iure habetur.

Quod lapides calcaeci et marmora variarum regionum et montium experientia teſte, aëris iniuriis magis, minusue reſiſtunt, id a diuerſitate mixtionis et intimiore vel laxiore partium cohaerentia et compage facile deriuari poteſt. Cum iam aedificia magnatum Petroburgi ſepius, quam alibi

alibi forſan e marmore conſtruantur, et non obſtante climate, tam frigore quam atmoſphaere humiditate ſatis rudi ac rigido, per integrum decennium et vltra, nullam marmoris aëri expoſiti corroſionem aut tabem monſtrent, hoc quoque reſpectu marmora illa attentione digna ſunt.

§. 3. Marmora a me examinata, quae Petroburgi communiter in vſum vocantur, partim *ſibirica*, partim *fennonica* ſunt. Illa e iugo Catharinenburgi Vralenſi deſumuntur, in itinerariis academicorum quorundam deſcripta; haec autem e Finlandia aduehuntur, vbi promontoria calcarea plagam ſeptentrionalem lacuum Onegae et Ladogae ambiunt et in inſulis nonnullis horum lacuum in conſpectum veniunt, multisque lapicidinis excauantur. Indoles huius marmoris calcareo rupeſtri ſimilis eſt, qualem montes ſecundarii vetuſtiores, qui venas metallicas interdum fouent, continere ſolent. Petrefactis caret et ſtratis amplis, nec fiſſilibus componitur, quare fragmenta ſaxoſa maioris molis pro lubitu ibi effodi poſſunt et re ipſa effodiuntur. Eſt praeterea marmoris, vel lapidis potius calcarei durioris, genus, in colle ſtratoſo ad *Putilouam*, circa Naſiam et Ladogam reperiundum, quod propter viciniam loci, diuturniorem petrae reſiſtentiam vel durationem et facilem excauationem, Petroburgum magna copia adfertur et in vſum trahitur. Hanc ob cauſam et vt comparari melius queant marmora Roſſiae indigena inter ſe inuicem, huius quoque examen inſtitui.

Analyſis omnium ac ſingulorum eodem fere modo peracta eſt, quare vnum idemque experimentum ſemel deſcripſiſſe ſufficiat, breuiter in ſequentibus indicando, vbi repetitum fuerit. Me autem omni, qua par eſt ſolertia et accura-

curatione haec pericula inſtituiſſe, praecipitata probe edulcoraſſe et quae ſunt reliqua, ne dubitent lectores, quaeſo. Pondus a me adhibitam centenarius eſt, centum libras continens. Hunc vero vnciae dimidiae, libram igitur duo cum ¼ fere granis aequalem feci, vt id quod ſub ipſa operatione neceſſario perderetur, nullius momenti eſſet.

A. Marmor Sibiricum coloris albi.

§. 4. Reperitur ad *Stannovoi* prope Catharinaeburgum, niuei eſt coloris, texturae ſpataceae, cum acidis mineralibus fortiter efferueſcit et propter duritiem inſignem polituram aſſumit, nec tamen chalybe ſcintillat.

Experimentum 1.

§. 5. Centenarius marmoris Stannouienſis pulueriſati cum aquae deſtillatae vnciis quatuor in cuburcita vitrea fortiter coquebatur, lixiuium filtrando ſeparabatur, reſiduum noua aqua affuſa bis iterum coctione vrgebatur. Evaporatione inſtituta haec lixiuia ne miculam ſelenitis praecipitarunt; illa autem ad ſiccitatem continuata terrae albae calcareae, parietibus vitri adhaerentis, nulla aciditatis veſtigia monſtrantis, libras circiter duas obtinui.

Experimentum 2.

§. 6. Fruſtulum marmoris, ponderis centenarii, igne aperto calcinatum libras viginti perdidit, per decem horas vero aëri expoſitum, libras quinque rurſus ponderis augmentum inde reſorpſit. Aquae frigidae vnciis duabus vel centenariis quatuor immiſſum, haec ſenſibilem calorem non aſſumſit, cremore calcis autem inducbatur, et marmor in

in puluerem granoſum ſatiſcebat. Pars fruſtuli tubo ferruminatorio calcinati, calcem bonae frugis haud produxit; igne diutius protracto aliud fruſtulum in ſuperficie molleſcebat, nec tamen fundebatur.

Experimentum 3.

§. 7. Centenarius pulueris marmoris cum acidi ſalis vncia (anatica parte aquae deſtillatae vt in caeteris quoque experimentis, hoc acido inſtitutis, diluta) digerebatur, liquor decantabatur, et reſiduum tres vnciae eiusmodi acidi iterum ſuperfundebatur, efferueſcentia noua oriente. His digeſtis pars marmoris, acido ſalis amplius inſolubilis manſit, quae probe edulcorata et ſiccata libras ſex pendebat.

Experimentum 4.

§. 8. Solutio flaueſcens, filtrata, adfuſo lixiuio alcali phlogiſticati (e part. 4. caerulei Berolin. et p. 1. alcali aërati, cum aqua deſtillata coctis et acido aceti praecipitatis) nullam coloris caerulei depoſitionem monſtrauit. Alcali aërato ſaturata, praecipitatum mucoſum, coloris albeſcentis ſpurci reliquit, quod aqua deſtillata edulcorabatur.

Experimentum 5.

§. 9. Vt terras forſan heterogeneas, terrae calcareae immixtas in apricum ponerem, praecipitatum hoc acido vitrioli aqua deſtillata diluto, ſaturabam; acidi portionem ſuperfluam addens, vt gypſo praecipitato reliquae terrae ſolutae manerent. Liquor filtro ſeparatus et aqua, ad edulcorandum gypſum adhibita, euaporando ſalem flocculentum capillarem leuiſſimi ponderis, coloris argentei, vel floribus

boracis ſimilis, dedit, qui aqua ſe ablui ſineret et libris quatuor cum dimidia aequiualeret. Liquor ſuperſtes cryſtallos nullas, ſed magma deliqueſcens dedit. Hoc aqua deſtillata ſolutum et alcali Tartari probe ſaturatum, terram depoſuit, praeuia edulcoratione ponderis librae Reſiduum liquoris non niſi alcali vitriolatum; terra autem acido vitrioli ſoluta alumen praebuit.

Experimentum 6.

§. 10. *Salem flocculentum argentei coloris* (Exp. 5.) ex omnibus marmoribus examinatis, elicui, quare e variis his lapidibus collectum vno ictu tentamini expoſui:

a. ſapor eius cretaceus erat,

b. ad ſolutionem completam et ſaturatam viginti quinque partes aquae requirebantur.

c. ſolutio euaporata chryſtallos ſquamoſas et granoſas dedit,

d. loco calido non fatiſcebat,

e. nec alcoholi vini ſuperfuſo et accenſo flammam alius coloris, quam quae huic competit, tribuit.

f. flammae tubo ferruminatorio condenſatae expoſitus pulverem album largiebatur et carboni ignito impoſitus odorem ſulphureum ſpargebat,

g. ſolutio acidis haud turbata fuit,

h. ſolutione alcali tartari lacteſcebat et ſub quiete veram terram calcaream praecipitabat. Ergo *Selenites* erat.

Expe-

Experimentum 7.

§. 11. Reſiduum indisſolubile experimenti tertii, quod ponderis librarum ſex erat, arenae ſubtilis albae faciem prae ſe gerebat. Alcali tartari libris quindecim fuſum vitrum deliquescens, ideoque liquorem ſilicum et terram ſiliceam praebuit.

B. Marmor albo et columbino colore variegatum.

§. 12. In Iugo Catharinoburgo-Vralienſi ad *Gornoitſchit* excauatur, prope cacumen iugi iſtius. Ex hoc marmore columnae Sarskoë-Seloënſes exſtructae ſunt.

Fractura ſpatacea eſt, particulis maioribus micantibus, cum acidis mineralibus fortiter efferueſcit; polituram egregiam et conſtantem aſſumit, chalybe autem non ſcintillat. Aqua feruente parum terrae calcareae ſoluitur. Calcinatione centenarius libras viginti duo perdit. Calx extincta texturae granoſae, coloris gryſeo albeſcentis eſt.

§. 13. E centenario acidum ſalis libras quatuor arenae albeſcentis non ſolutas reliquit, quae alcali aërato fuſae liquorem ſilicum et ille terram ſiliceam puram praebuit. Solutio acido ſalis facta lixiuio alcali phlogiſticati admixto, praecipitatum caeruleum depoſuit, poſt edulcorationem vix librae pondus exhibens. Reſiduum liquoris, alcali aërato ſaturatum, praecipitatum coloris ſpurci albentis dedit. Hoc acido vitrioli vltra ſaturationem combinatum, gypſum albescens, quaſi talcoſo-vnguinoſum produxit et aqua acidula ſuperſtes libras ſex ¼ ſelenitis flocculenti dedit. Quod manſit

ſit liquoris, alcali tartari imperfecte ſaturatum, terram argilloſam luteſcentem et alcali vitriolato addito, magneſiam vitriolatam dedit, quae quantum fieri potuit, probe ſeparata ponderis librar. viginti quinque erat. Ad finem portio terrae obtinebatur argillaceae indolis, quae cum ſupranominata, luteſcentis coloris, pondus librarum trium cum dimidia efficiebat.

§. 14. Marmor igitur palumbinum Gornoiſtſchitenſe in centenario terrae ſiliceae libras quatuor; magneſiae, proportioni a celeberrimis *Bergmann* et *Weigleb* erutae conuenienter, vix libras quinque; terrae aluminis libras tres cum dimidia; croci ſeu terrae martis libram vnam; terrae calcareae libras octuaginta ſex continet. In marmore autem mixto aëris fixi et aquae viginti duo centeſimarum partium pondus aequaui.

C. Marmor colore bruneo-rufo et albo.

§. 15. Inter locum *Liſchma* et *Sondala* in Fennonia effoditur et pulchritudinis ac duritiei cauſa ad aedificia aëri expoſita frequenter adhibetur.

Cultro raſum non olet. Puluis raſurae magneti non obedit. Textura minute micacea et dura admodum eſt, vt chalybe percuſſum ſcintillas edat. Cum acidis mineralibus lente efferueſcit. Aqua coctione parum calcis extrahit. Fruſtulum ponderis centenarii, in quo anaticae circiter partes marmoris albi et ruteſcentis adunatae erant, ſub ignitione libras viginti in auras emiſit. Pars ruſeſcens brunei coloris erat. Extinctione totum fruſtulum calcem graniformem porri-

porrigebat, nec vlteriore calcinatione in puluerem ſubtiliorem reduci potuit. Idem marmor ſubtiliſſime pulueriſatum lauando, ſeparatio nulla materiarum heterogenearum effici potuit. Portio groſſior ſuperſtes mechanicae diuiſionis patiens erat, lauando iterum puluerem homogeneum ſiſtens.

§. 16. Acidi ſalis librae ſexdecim vltra centenarium non ſoluebant. Lixiuium alcali phlogiſticati praecipitati caerulei libram vnam cum $\frac{1}{4}$ deiecit. Solutioni ſuperſtiti alcali Tartari additum, praecipitatum mucoſo-albeſcens porrexit; huic acidum vitrioli copioſius adfuſum gypſum ſubtile album eripiebat. Aqua acidula manens libras tres ſelenitis flocculenti, dein libras quatuordecim cum dimidia magneſiae vitriolatae dedit, quae libras tres magneſiae purae circiter continebat. Liquor ſpiſſus denuo remanens poſt quatuordecim dierum ſpatium et quietem, libras ſex criſtallorum aluminis dedit, in quibus libra vna cum $\frac{1}{4}$ terrae argillaceae pondus erat. Quod manſit liquoris acidi alcali Tartari ſaturabatur et ita terrae argillaceae libras quatuor, dein alcali vitriolati quidpiam dedit.

§. 17. Reſiduum indiſſolubile (§. 16.) arenae quartſoſae rufae haud abſimile erat. Magneti non obediebat. Librae octo eiusdem cum boracis libris decem fundebantur et vitrum flaueſcens porrigebant. Reliquae librae octo alcali tartari libris ſexdecimfuſae, vitrum eiusdem indolis dederunt, quod ad contactum aëris deliqueſcebat, et aqua penitus ſoluebatur. Acido vitrioli ſolutio non praecipitabatur, eo autem copioſius adfuſo et dein alcali aërato praeter modum ſaturato, gelatina hyalina acquirebatur, quae aqua diluta,

luta, et acido vitriolico ad punctum ſaturationis adfuſo, terrae ſiliceae purae libras ſex praebuit.

D. Marmor coloris palumbini, albo nebuloſo.

§. 18. Locus natalis *Pereguba* audit, ad lacum Onegam ſitus. Marmori Gornoiſchitenſi (§. 12.) facie externa congruit, maculis autem flauis notatur, quae ſerpentino lapidi ſimiles ſunt, ſed acidis, vt reliquum marmor, fortiter efferueſcunt. Vix eadem duritie, qua marmor ſibiricum gaudet; polituram tamen aſſumit et aëre non labefactatur. Igne aperto candens centenarius, libras triginta ſex perdit. Calx inde proueniens gryſei coloris, extinctione puluerem album ſubtilem porrigit.

§. 19. Acidum ſalis hoc marmor totum quantum fere ſoluit, miculis nonnullis tantum relictis, pondere vix libram aequantibus. Alcali phlogiſticatum libram vnam cum dimidia croci martis e ſolutione praecipitauit. Reliquum terrae, coloris albi immundi, alcali aërato dejiciebatur. Praecipitatum, acido vitrioli vltra ſatietatem ſuperſuſo, libras decem ſelenitis flocculenti; alcali aërato dein addito libram vnam cum dimidia terrae argillaceae, coloris luteſcentis, dedit. Terra calcarea igitur cum aëre fixo et parua portione aquae in hoc marmore contentis, pondus librarum nonaginta ſeptem cum $\frac{3}{8}$ efficit.

E. Marmor coloris gryſeo-caeruleſcentis (Perlgrau).

§. 20. Prope *Peregubam* circa lacum Onega inuenitur, colore ſaturatiore aut dilutiore nebuloſum eſt, textura minute ſquamoſa, fractura cuſpidato-fibroſo (ſplitterig). Acidis

cidis lente efferueſcit et tam durum eſt, vt chalybe percuſſum hinc inde ſcintillet. Calcinatione centenarius libras triginta perdit, calcem albam, ſed granoſam, nec puluerulentam relinquens.

§. 21. Acidum ſalis e centenario huius marmoris libras octodecim inſolubiles relinquit, quae indolis quartſoſae erant, quoniam alcali tartari portione dupla fundebantur, vitrum deliqueſcens et terram ſiliceam porrigentes. Solutio marmoris lixiuio alcalino phlogiſticato adfuſo praecipitatum caeruleum ponderis librae dimidiae et dein alcali aërato addito praecipitatum album dedit. Hoc vltimum, acido vitrioli vltra ſatietatem imbutum, et dein alcali tartari rurſus praecipitatum, libras duo cum dimidia terrae argillaceae in apricum poſuit.

F. Marmor coloris carnei.

§. 22. Ad *Tiwdi* in Finlandia effoditur, vnicolor eſt, quaquauerſum finditur dum malleo contunditur, et fractura quartſum arenaceum vel granoſum refert. Debilem admodum cum acidis efferueſcentiam praebet, chalybe autem percuſſum facile et multum ſcintillat. Calcinando centenarius libras triginta quinque perdit.

§. 23. Digeſtione, cum noua ſemper portione acidi ſalis, quater inſtituta, ſingula vice efferueſcebat, tandem ita ſoluebatur, vt libra cum dimidia terrae ſiliceae e centenario remanerent. Solutio, methodo antecedente tractata, libram vnam cum $\frac{5}{8}$ praecipitati caerulei, libras tres ſelenitis et libram cum dimidia terrae argillaceae vireſcentis dedit. Pondus

dus igitur terrae calcareae nonaginta ſex cum ¾ aequat, acido aëreo et phlegmate deductis.

G. Marmor coloris nigro-gryſei.

§. 24. Ad *Serdopol* ſupra lacum Onega inuenitur; nigreſcens eſt, plurimis autem punctis albis conſperſum, gryſeum redditur. Cultro raſum non olet; efferueſcentia cum acidis fortis eſt. Fractura minute micacea, et re ipſa ſquamulas micae albeſcentis hinc inde continet. Polituram lubens adſumit, chalybe autem percuſſum non ſcintillat. Centenarius calcinando libras viginti duo perdit. Calx extincta texturae arenaceae eſt et particulas micaceas iam clare monſtrat.

§. 25. Acidum ſalis e centenario non vltra libras ſeptuaginta vna cum ¼ ſoluebat. Alcali phlogiſticatum dein praecipitatum album dejiciebat, quod magna copia acidi vitrioli ſolutum gypſum, et liquor acidus ſuperſtes libras tres cum dimidia ſelenitis flocculenti porrigebat. Liquor acidus alcali tartari ſaturatus, libras quatuor terrae argillaceae praebuit, quae calcinando rufeſcebat, partim quoque magneti obediebat. E libris viginti octo ¼, reſidui inſolubilis, micae librae nouem lauando ſeparabantur et quod manſit, ope alcali fuſum, terram ſiliceam dedit.

Experimentum 8.

§. 26. Centenarii tres marmoris pulueriſati in retorta vitrea, cui cucurbita luto adiungebatur, igni tam forti per quatuor horas exponebatur, vt retorta emolliretur. Guttulae decem phlegmatis inſipidi mere aquoſi in cucurbita colli-

colligebantur, quae neſcio an non parietibus vitri antea adhaererent. Marmor vſtum colore candidione erat, iam adhuc acidis efferueſcebat et ſoluebatur, nondum igitur omne acidum aëreum inhaerens amiſerat. Aquae frigidae ſenſibilem calorem non tribuit; magna autem portione coctam aquam calcis dedit, quae euaporata, ope ſolutionis alcali tartari inſtillatae praecipitatum album, et ſolutione argenti in acido nitri, praecipitatum eiusdem coloris praebuit. Vltimum praecipitatum nigreſcebat; luna cornea tamen non aderat. Reſiduum euaporationis ad ſiccitatem perductae, coloris flaueſcentis, pondus librae ſex cum dimidia habuit, aqua rurſus ſolui non potuit, facile autem acidis ſub efferueſcentia. Vera igitur terra calcarea erat.

§. 27, Ex dictis patet, centenarium marmoris huius gryſei: terrae ſiliceae partes nouendecim cum $\frac{1}{4}$, argillaceae partes quatuor, micae partes nouem, croci martis partem vnam cum $\frac{1}{8}$, phlegmatis aquoſi partes quinque circiter; acidi aërei partes ſexdecim vel ſeptendecim continere. Reliquum igitur terra calcarea pura erat, cuius pondus partium quadraginta quinque, vel portione acidi aërei et phlegmatis addita, par hinc ſexaginta ſex cum $\frac{5}{8}$ aequat.

H. Marmor gryſeum, venis albis.

§. 28. Ad plagam ſeptentrionalem lacus *Ladogae* effoditur. Venae et maculae albae partem circiter tertiam maſſae totius efficiunt. Fractura micat, polituram egregie adſumit, chalybe non ſcintillat. Acidis mineralibus fortiter efferueſcit. Cultro raſum non olet.

§. 29. Centenarius libras triginta quatuor amiſit. Calx fuſco albeſcens granuloſa erat. Acidum ſalis dilutum e centenario libras nouendecim cum dimidia ſoluit. Reſiduum inſolubile libras quinque micae, lauando ſeparandae, et libras tres cum dimidia terrae ſiliceae dedit. Lixiuio alcalino phlogiſticato addito praecipitati caerulei vel terrae martialis ſesquilibra, et dein, alcali aërato addito, praecipitatum griſeo albeſcens e ſolutione obtinui. Vltimum praecipitatum acidi vitrioli magna copia ſolutum, libras quinque ſelenitis flocculenti et praeterea portionem gypſi quaſi mucoſi dedit. Quod manſit liquoris, alcali aërato ſaturatum, libras duo cum $\frac{1}{4}$ terrae argillaceae praebuit.

I. Marmor gryſeo et rubro nebuloſum.

§. 30. Ad *Peregubam* Onegae effoditur. Fractura iaspidi haud abſimile eſt. Dum contunditur vndiquaque finditur. Raſum non olet. Acidis fruſtula integra iniecta parum; pulueriſata autem valde efferueſcunt. Centenarius calcinatione perdit libras viginti et vnam. Calx extincta ſatis alba, granoſa, nec puluerulenta. Calx cruda pulueriſata coctione aquoſa libram vnam cum dimidia e centenario perdit.

§. 31. Centenarius marmoris crudi pulueriſati, acido ſalis diluto, remanente libra vna terrae ſiliceae, ſoluebatur. Solutio flaueſcens, alcali phlogiſticato praecipitata, terram martialem caeruleam, ponderis librae vnius cum tribus quartis — depoſuit. Reſiduum, ſolutione alcali aërati praecipitatum, magiſterium album terriforme dedit, quod acido vitrioli vltra modum ſatiatum gypſum et libras duo cum dimidia ſelenitis flocculenti, tandemque addito alcali

alcali aërato libras quatuor cum dimidia terrae argillaceae dedit. Liquorem ſuperſtitem chryſtalliſando, magneſiae vitriolatae libras quinque et alcali vitriolati portiunculam obtinui. Magneſiae albae pondus in libris quinque magneſiae vitriolatae ſecundum experimenta Celeberr. *Bergmann* quintam circiter partem vel libram efficit.

K. Marmor carnei coloris, albo variegatum.

§. 32. Ad *Onegam* reperitur. Textura eſt ſubtiliter micacea, fractum vndiquaque fiſſile. Cum acidis lente efferuescit. Chalybe percuſſum ſcintillat. Aqua e marmore pulueriſato ſalini nihil coctione extrahit. Calcinando centenarius libras ſeptendecim amittit. Calx viua admodum alba et granoſa erat.

§. 33. Acido ſalis diluto e centenario librae octoginta et vna ſoluebantur. Alcali phlogiſticato libram cum $\frac{1}{4}$ caerulei martialis et dein ope alcali tartari praecipitatum albidum e ſolutione deiiciebatur. Hoc, acido Vitrioli vltra modum ſatiatum, gypſum, et euaporatione liquoris reſidui ſelenitis flocculenti libras tres cum $\frac{1}{4}$, addito tandem alcali tartari libras quatuor cum $\frac{3}{4}$ terrae argillaceae dedit. E reſiduo inſolubili librae duo cum dimidia micae lauando ſeparabantur. Quod denuo remanebat igni exponebatur ad candescentiam vsque, quo facto ferri libra ſemis et vltra magnete extrahi potuit; vltimum reſiduum tripla portione alcali aërati fuſum vitrum deliquescens vel liquorem ſilicum dedit.

L. Marmor aceroſum Linnaei.

§. 34. Ad *Onegam* reperitur; colore albo ſed impuro. Textura aequalis eſt, particulis minimis. Baſis

 mar-

marmorea, faſciculos radiatos coloris citrini hinc inde continet, centeſimam circiter partem maſſae totius efficientes, quo fit, vt marmor hoc marmori aceroſo *Linnaei* prorſus congruat, vel vnum idemque ſit. Pars proprie calcarea chalybe percuſſa non ſcintillat, polituram egregiam aſſumit et cum marmore Stannowoenſi (A. §. 4.) quoad mixtionem conuenit, excepto inquinamento martiali vberiore. Centenarius nimirum libram ſemis caerulei martialis vel berolinenſis, libras octo terrae ſiliceae, libras duo terrae argillaceae largitur et libras viginti ſub calcinatione perdit. Faſciculi radiati in Marmore obuii molliores quidem fabricae ſunt, polituram tamen non recuſant. Facie externa ſpato ſtriato calcareo vel gypſoſo, Zeolitho, Schello vel Asbeſto plus minus congruunt. Radii pollicis longitudinem ſaepe aequant, interdum concentrici, interdum paraleli ſunt; iam filamentorum inſtar, iam depreſſi vel latiores apparent, quod frequentius obtinet. Secundum longitudinem diuiduntur, ſectione transuerſali autem textura fibroſa difficulter patet. Horum iam analyſin tradam.

§. 35. Cum acidis mineralibus, imprimis pulueriſati, bene efferuescunt. Aqua parum terrae calcareae ſub coctione extrahere valet. Centenarius igne aperto calcinatus libras quindecim perdit, acido ſalis diluto digeſtae libras quadraginta ſolubiles amittunt. Solutio lixiuio alcali phlogiſticati parum caeruleſcit, nec praecipitatur; alcali aërato autem, praecipitatum album obtinui, quod cum acido vitriolico ſtrenue efferueſcebat et eo vltra modum ſaturatum ſelenitem flocculentum et gypſum dedit. Liquor ſuperſtes alcali aërato ſaturatus, terrae argillaceae libram cum $\frac{1}{4}$ praecipitauit.

§. 36.

§. 36. Reſiduum inſolubile digeſtionis cum acido ſalis (§. 35.) praeuia edulcuratione libras ſexaginta pendebat et colore albo erat. Librae duo tubo ferruminatorio expoſitae, colorem non mutabant, nec odorem ſulphureum ſpargebant, ſed tempore decem minutorum, vt vocant, praeterlapſo, ſcorias quaſi ſpumescentes ponderis librae vnius cum dimida dederunt, quae cum acidis non efferuescebant. Reſidui huius libra cum libris duabus alcali tartari fuſa vitrum praebuit, quod contuſum, aqua coctum, dimidium ponderis amiſit. Solutio haec aquoſa terram ſiliceam praecipitauit. Reſidui ſupra nominati libra vna, borace fuſa, vitrum coloris albi, ſed ſpurci dedit. Acidum nitri huic reſidui nihil, oleum vitrioli decem libris dimidiam, et aqua regis decem libris libram vnam eripiebat, coctione inſtituta.

§. 37. Ex iam dictis concludere licet: baſin terream fasciculorum radiatorum in hoc marmore reperiundorum, *asbeſtinae* indolis eſſe, vel potius cum *Schörlo asbeſtiformi* conuenire, quem Celeb. *Bergmann* in *Diſſertatione de Terra Asbeſtina* §. §. 13. 14. examinauit, et non niſi maiore copia terrae ſiliceae differre.

M. Marmor obſcure gryſeum et album, Schoerlo mixtum.

§. 38. Cum antecedente ad *Onegam* vno eodemque loco reperitur, eiusque ſola varietas eſt. Radios plurimos eiusdem indolis continet, quales in marmore antecedente (L. §. 34.) inueniuntur, hic autem magis disperſi vel ſolitarii aut ſaltem paraleli ſunt. Sed praeter illos, paruas chryſtallos Schoerli nigri magna copia continet.

Difficile admodum eſt, ſchoerlum et radios asbeſtiformes e marmore probe ſeparare. Fruſta aciculis vel columnis eiusmodi vberrime mixta, polituram egregie aſſumunt, chalybe percuſſa non ſcintillant, cum acidis vero ſtrenue efferuescunt.

§. 39. Marmor chryſtallis ſchoerlaceis plane deſtitutum textura ſpatacea eſt, ad chalybem non ſcintillans. Centenarius calcinando libras viginti octo perdit et libras quatuor terrae ſiliceae, quatuor cum dimidia terrae argillaceae et ſesquilibram ferri continent; ideoque quantitas terrae calcareae purae in hoc marmore libras ſexaginta duo, vel acido aëreo ſaturata libras nonaginta, aequat.

§. 40. Centenarius materiae chryſtallinae vel radiatae, quantum fieri potuit probe ſeparatae, ſub calcinatione igne aperto, libras octodecim amiſit, colore erat albo ſpurco, texturam radiatam tamen retinebat. Aqua ſub extinctione parum cremoris produxit. Calx granuloſa erat. E centenario acidum ſalis libras ſexaginta ſeptem ſoluebat. Solutio lixiuio alcali phlogiſticati praecipitata, libram vnam et $\frac{5}{8}$ caerulei martis, et dein alcali aërato addito terram ſpurce albescentem praebuit. Haec cum acido vitrioli efferuescens gypſum dedit. Liquor ſuperſtes, acido vitriolato vltra modum ſaturatus, euaporando libras ſex cum tribus quartis ſelenitis flocculenti, et dein adiecto alcali tartari ad ſatietatem vsque, libras octo terrae luteſcentis largiebatur, quae tota quanta fere acido vitriolico ſoluebatur et chryſtalliſando magneſiam vitriolatam et argillam vitriolatam praebuit. Illius quantitas libras nouendecim circiter efficiebat, in quibus ſecundum experimenta Celeber. *Bergmann*

mann librae quinque circiter magneſiae continentur; ideoque terrae argillaceae pondus circiter trium librarum tribuendum erit.

§. 41. Reſiduum in acido ſalis haud ſolubile (§. anteced.) libras triginta octo pendebat et albi coloris erat. Tubo ferruminatorio expoſitum album colorem non mutabat et leuiter tantum conglomerabatur. Parte anatica boracis fuſum, vitrum opacum dedit. Librae decem eiusdem reſidui libris quadraginta alcali tartari fuſae vitrum deliquescens porrigebant, relicta portione terrea non deliquescente. E liquore librae duo ſeparabantur. Acidum nitri e decem libris, tres libras ſoluebat. Aliis decem aqua regis libras duo cum dimidia eripiebat. Compoſitio igitur huius Schoerli et materiae radiatae ab illa parum differebat, quam in marmore L §. 34. obſeruaui; maiore tantum terrae ſiliceae ingredientis copia ſe diſtinguebat.

Schoerli librae quinque, quousque fieri potuit accurate ſeparati, libris ſex boracis fuſae, vitrum hyalinum viride; librae quinque radiorum asbeſtiformium contra, libris ſex boracis fuſae vitrum opacum nigrescens dederunt.

N. Marmor flauum ex Italia.

§. 42. Vt marmora Roſſiae indigena cum exteris compararem, ſupra nominatum, Petroburgi frequenter vſurpatum examinaui. Textura fere compacta vel impalpabili, iaspidis inſtar, gaudet, politurae admodum capax eſt, chalybe percuſſum non ſcintillat, cum acidis ſtrenue efferueſcit.

§. 43.

§. 43. Centenarius aqua coctus terrae calcareae ſesquilibram; igne aperto autem calcinatus pondus librarum viginti amiſit. Acidum ſalis e centenario libras nonaginta ſeptem ſoluit. Solutio, addito lixiuio alcali phlogiſticati, colore viridi aquae marinae (meergrün) imbuebatur et librae quartam partem caerulei martialis deiiciebat. Praecipitatum alcali tartari ope deiectum, luteo-album erat. Acido vitrioli diluto ſaturatum, gypſum albiſſimum; liquor vero euaporatus libras octo cum dimidia ſelenitis flocculenti, tandemque alcali tartari ſaturatus, libras duo terrae aluminaris dedit. Liquor denique etiam nunc ſuperſtes alcali vitriolatum, nec non magneſiae vitriolatae libras ſex praebuit, in quibus libra vna cum $\frac{1}{4}$ magneſiae continetur.

§. 44. Reſiduum indiſſolubile ponderis librarum trium, puluerem luteſcentem referebat, ignitione albeſcentem. Tripla portione alcali aërati fuſum, vitrum deliqueſcens et hoc terram ſiliceam dedit.

O. Marmor rude, rubro, flauo et viridi variegatum.

§. 45. Ad *Ladogam*, loco Werſtas viginti *Schluſſelburgo* diſtante, circa *Putilowam*, in ſtrato ſecundario (Flötz) inuenitur. Colore fuſco rubro, liuido-flauo et viridi variegatum eſt. Textura terrea gaudet; corporibus petrefactis, at minus perfectis, vel obſoletis ſcatet. Polituram quidem adſumit, ſed ob exiguam lapidis duritiem, minus conſpicuam. Petroburgi tamen frequenter in vſum vocatur; quia aëri reſiſtit, haud difficulter effoditur et advehi-

uehitur, ſcalis, fundamentis ac ornamentis palatiorum idoneum.

§. 46. Cum acidis lente efferueſcit. Aqua deſtillata ſub coctione libras duo cum tribus quartis e centeriano ſoluit. Solutio euaporata acidi ſalis praeſentiam prodit et calcem ſalitam porrigit. Centenarios tres marmoris pulueriſati deſtillationi exponens (vid. retro Marmor G.) phlegma albi coloris, empyreuma olens obtinui, acidi ſalis praeſentiam clarius monſtrans, quam quae extractione aquoſa ſe prodidit. Deſtillatione pars quarta ponderis marmoris crudi perdebatur. Libae ſex vel octo phlegmatis vaſis deſtillatoriis facile adhaerebant. Marmor vſtum coloris albo griſei erat, cum acidis, etiamnum efferueſcebat; aqua extinctum, absque calore, calcem albidiorem et ſubtiliorem et aquam calcis dedit. Calcinatione igne aperto inſtituta, e centenario non vltra libras viginti tres perdebantur. Calx luteſcens, aqua extincta rudis et impuri coloris reddebatur. Aquam calcis admodum debilem dedit.

§. 47. Acidum ſalis e centenario libras octoginta tres ſoluit. Solutio flaueſcens, alcali phlogiſticato addito, colore cyani imbuebatur et libras fere duas praecipitati caerulei dedit. Reliqua ſolutio, alcali Tartari addito, praecipitatum album impuri coloris praebuit, quod cum acido vitriolico ſttrenue efferueſcebat et in gypſum caeruleſcens mutabatur. Liquor ſuperſtes acido abundans euaporando primum libras ſex ſelenitis flocculenti, dein alcali aërato ſaturatus libras duodecim terrae argillaceae dedit, et chryſtalliſando, praeter alcali vitriolatum, vltra libras ſepten-

 decim

decim magneſiae vitriolatae depoſuit. Magneſiae purae pondus in his libris ſeptendecim, libras tres cum dimidia circiter aequat.

§. 48. Reſiduum non ſolubile, ponderis librarum ſeptendecim, coloris ſpadicei, calcinando rufeſcebat, magneti hinc inde obediebat; et igne expoſitum libras duo cum dimidia amittebat. Cum acido vitrioli dum digerebatur, librae quinque ſoluebantur, quae addito alcali tartari ad ſatietatem vsque, praecipitabantur et argillaceae indolis erant, coloris albi. Reſiduum ſolutionis in acido vitrioli, cum tripla portione alcali tartari fuſum, vitrum ſiliceum deliqueſcens dedit. In centenario igitur marmoris crudi pondus terrae calcareae acido aëreo et phlegmate onuſtae libras ſexaginta quinque cum dimidia, purae autem libras quadraginta tres efficit.

§. 49. Vt eo melius ante oculos ponantur et inter ſe comparentur partes conſtitutiuae et durities diuerſa marmorum examinatorum, tabulam exhibeo ſequentem, quae producta ſingulorum indicat. Ponderis decrementum, ſub calcinatione aequali, igne aperto, obſeruatum cui integra fruſtula marmorum exponebantur, quoad maximam partem aëri fixo euaporanti tribuendum eſt. Quod autem partes quoque aquoſae marmoribus hiſce inſunt, deſtillatione marmoris G. §. 26. O. §. 46. euictum eſt. Fieri tamen poteſt, vt nonnullae etiam partes fixae igne ereptae fuerint; proprio enim apparatu copiam aëris fixi et aquae his marmoribus inhaerentis accurate examinare, meum propoſitum hac vice non erat, in id potius intentus,

tus,

tus, vt transmutationem terrarum primitiuarum a nonnullis affirmatam et gradus eiusdem, ſi darentur, obſeruarem, quorum tamen veſtigia nulla prorſus inueni. Caeterum quantitatem aëris fixi et aquae, terris et lapidibus calcareis inhaerentem, alii auctores iam ſatis dudum explorarunt. Optandum eſt, vt de reliquis corporibus mineralibus aeque conſtaret. Vix errabimus, ſi decrementum ponderis marmorum igne aperto calcinatorum, quod viginti duo vel tres partes centeſimas efficit, ita diuidimus, vt partes quinque vel ſex phlegmati aquoſo, partes ſeptendecim vel octodecim aëri fixo tribuantur et dein partes terreae ſubtractione proportionali facta, in ſtatu puro vel ab omni acido aëreo liberae determinentur. Terrae calcareae purae pondus, quia baſis marmorum propria eſt, ita notaui, vt illud ſequenti tabulae insererem, quod deducto pondere reliquarum omnium partium conſtitutiuarum, analyſi ſeparatarum manſit.

§. 50. Sequitur ſchema, quo partes conſtitutiuae marmorum quorundam Roſſiae indigenorum proponuntur:

 Cente-

Centenarius continen:	Terrae calcareae aëratae	Terrae ſiliceae	Terrae argillaceae.	Magneſiae	Terrae martialis	Micae.	Terrae asbeſt.	Decrement. calcination.	Durities.
A. Marmor. alb. ſibir.	93	6	1	—	—	—	—	20	—
B. M. caeruleo alb.	86½	4	3½	5	1	—	—	22	—
C. M. bruneo alb. fenn.	74½	16	5¼	3	1¼	—	—	20	ſcintillat.
D. M. caerul. alb. fenn.	97⅜	—	1½	—	1⅛	—	—	36	—
E. M. albo caerul. fenn.	79	18	2½	—	½	—	—	30	—
F. M. rubrum fenn.	96¾	1½	1½	—	1⅝	—	—	35	—
G. M. obſcur. griſ. fenn.	66⅝	19¼	4	—	1⅛	9	—	22	ſcint.
H. M. griſeo alb. fenn.	87	3½	2¾	—	1½	5	—	34	—
I. M. griſeo-rub. fenn	91¾	1	4½	1	1¾	—	—	21	—
K. M. alborubeſ. finn.	75	16	4¾	—	1¾	2½	—	17	—
L. M. aceroſum L.-fenn.	89½	8	2	—	½	—	—	20	—
Subſtant. radiata.	38¾	20	1¼	—	indic	—	40	23	—
M. M. albo-griſ.acer.fen.	90	4	4½	—	1½	—	—	28	—
Subſt. ſchorl.	51¾	6¼	3	5	1⅝	—	26¾	18	—
N.M.flau.ital.	93½	3	2	1¼	¼	—	—	20	—
O. M. varregat.ingerman.	65½	12	17	3½	2	—	—	25	—

(cum indciio acidi ſalis).

§. 51.

§. 51. Marmora omnia in antecedentibus examinata, quae chalybe per cuſſa ſcintillant, terram ſiliceam continent; haec vero non ſemper cauſa huius phoenomeni eſt, vbi parca nimis copia mixtionem ingreditur. In marmoribus C, E et K. ſexdecim ad octodecim partes centeſimae terrae ſiliceae inueniuntur; marmor F. autem non vltra ſesquipartem et I. vnicam partem in centenario continet. In his igitur binis vberiori copiae ferri ingredientis potius, quam terrae ſiliceae, durities, ſcintillis prouocandis neceſſaria, adſcribi debet. Marmor ſub litera G. deſcriptum, terra ſilicea quidem abundat; mica autem immixta impedit, vt chalybe percuſſum ſcintillet.

§. 52. E nullo marmorum genere, quotquot examinaui, principia elici potuerunt, quae mediae quaſi naturae inter terram calcaream et ſiliceam gauderent, vel in transgreſſu et transmutatione vnius in alteram conſtituta eſſent. Omnia ac ſingula potius perfecte ſeparari potuerunt. Terrae non ſolubilis marmorum L et N, proprietatibus nonnullis communibus quidem gaudent; asbeſteae autem indolis ſunt, id eſt terra deriuatiua, ſimplicioribus compoſita, prout analyſi omnibus numeris abſoluta clare monſtrauit Celeberr. *Bergmann* in diſſert. de Terra Asbeſtina.

§. 53. Corollarii loco notamus, marmora in antecedentibus examinata in centenario continere:

Terrae calcareae purae, acido aëreo tantum vnitae libras vel partes triginta octo vsque ad nonaginta ſeptem vel octo.

Terrae ſiliceae libram vel partem vnam ad nouendecim; ſolo marmori D. defuit.

Terrae argillaceae partem vnam ad ſeptendecim.

Magneſiae albae partem vel libram vnam ad quinque. Haec tamen quinque ſolum varietatibus ineſt; in reliquis omnibus abeſt,

Micae libras duo cum dimidia, ad nouem; ſed tribus tantum varietatibus ineſt.

Asbeſti ſchoerlacei, in marmore L. et M. libras ſexaginta ſex cum $\frac{3}{4}$ ad quadraginta.

Ferri portio, excepto marmore A, omnia ac ſingula inquinat, a praeſentiae veſtigio vsque ad libras duos.

Acidi aërei quantitas, vt §. 49. attuli, libras ſeptendecim ad octodecim efficit.

Aquae ſ. phlegmatis aquoſi libras quinque ad ſex.

Acidi ſalis veſtigium in calcareo ſtratoſo O. tantum inveni.

Caeterum marmora haec omnibus heterogeneis, alcali volatilis, acidi vitriolici vel gypſi, materiae inflamabilis, ſulphuris, petrolei, metalli (ſolo ferro excepto) et reliquorum corporum mineralis proſapiae, quae in aliis calcareis et marmoribus interdum occurrunt, prorſus carent. Ideo forſan aëris iniuriis fortius reſiſtunt.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE-

DETERMINATIO ERRORVM, QVI IN LONGITVDINES ET LATITVDINES ALICVIVS COMETAE GEOCENTRICAS INDVCVNTVR, EX COMMISSIS ERRORIBVS IN ELEMENTIS ORBITAE.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Disquiſitio de erroribus, qui in Longitudines vel Latitudines alicuius Cometae Geocentricas deriuantur, ex commiſſis erroribus in determinatione Elementorum iſtius Cometae, eam praecipue habet vtilitatem, vt inde diiudicari queat, quales praecipue obſeruationes eligi debeant, ex quibus ſumma cum exactitudine, horum Elementorum valores erui queant. Nam ſi compertum fuerit errorem in Longitudine Nodi commiſſum in Longitudine Cometae Geocentrica inſignem mutationem producere; viciſſim quoque concludi poteſt errorem obſeruatae Longitudinis Geocentricae exiguam mutationem in Longitudine Nodi pro-

ducere

ducere, quamobrem eiusmodi obſeruatio pro determinanda Longitudine Nodi adprime erit conueniens; ſimilisque ratio eſt cum reliquis Cometae cuiuspiam Elementis. Immo hinc facile patet, ſi hac disquiſitione id praeſtitum fuerit, vt nonnulla horum Elementorum quaſi independenter a reliquis determinari potuerint, tum disquiſitionem de reliquis eo euadere faciliorem et per pauciores obſeruationes exſequi poſſe; ſic ſi poſitio plani in quo Cometa mouetur, independenter a reliquis Cometae Elementis determinari potuerit, tum binae obſeruationes circa hunc Cometam inſtitutae ſufficerent ad reliqua Cometae elementa determinanda.

Tab. V Fig. 1. §. 2. Sit N S T planum Eclipticae in quod ex loco Cometae C demittatur normalis C c, exiſtente loco ſolis in S et telluris in T, tumque iungantur S C, S c, T C, T c, S T lineis rectis, ſitque recta N S L linea nodorum, in qua planum orbitae huius Cometae ſecat Eclipticam. Deinde in plano orbitae N S C ducatur linea S M, quae poſitionem perihelii indicet, iamque ex cognitis Elementis orbitae dabitur primum angulus N S M quem per Π indigitabimus, deinde quoniam tempus quo Cometa obſeruatus ſit in C cognitum habeatur, ex cognito quoque tempore Perihelii quo Cometa in M verſatus ſit, dabitur anomalia Cometae vera ſeu angulus M S C, quem per Φ indicabimus, vnde erit ang. N S C $= \Pi + \Phi$. Vlterius ſi Longitudo Nodi Cometae indicetur per N, Longitudo terrae e Sole viſae per l, et inclinatio orbitae Cometae per i, conſequemur angulum N S T $=$ N $- l$, pro angulis autem N S c, C S c, quibus Longitudo et Latitudo Cometae Geocentrica determinatur, nec non Linea

S c

S c quae diſtantiam curtatam exprimit, ſequentes habentur aequationes:

$$\text{tang. } N S c = \text{tang. } (\Phi + \Pi) \text{ coſ. } i;$$
$$\text{ſin. } C S c = \text{ſin. } (\Phi + \Pi) \text{ ſin. } i; \text{ et}$$
$$S c = S C \text{ coſ. } C S c.$$

§. 3. Iam vero pro determinando loco Cometae Geocentrico, qui per angulos S T c, C T c determinatur, ſequentes aequationes praeprimis vſui Aſtronomico accommodatae videntur:

$$\text{tang. } S T c = \frac{S c \text{ ſin. } T S c}{S T - S c \text{ coſ. } T S c} = \frac{S C \text{ coſ. } C S c \text{ ſin. } T S c}{S T - S C \text{ coſ. } C S c \text{ coſ. } T S c} \text{ et}$$
$$\text{ſin. } C T c = \text{ſin. } C S c \cdot \frac{S C}{T C}, \text{ vbi}$$
$$T C = \sqrt{(S C^2 + S T^2 - 2 S C . S T \text{ coſ. } C S T)}.$$

Supponamus iam facilitatis gratia, angulos N S c, c S T, C S c, S T c, C T c reſpectiue per litteras η, θ, λ, θ', λ' indigitari, diſtantias autem S C, S c, T C, T c, S T per v, v', u, u', c indicari, eritque his litteris ſubſtitutis

$$\text{tang. } \theta' = \frac{v. \text{ coſ. } \lambda \text{ ſin. } \theta}{c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta} \text{ et ſin. } \lambda' = \frac{v}{u} \text{ ſin. } \lambda$$

exiſtente

$$u^2 = v^2 + c^2 - c v \text{ coſ. } \theta \text{ coſ. } \lambda.$$

§. 4. Iam ſi aequatio tang. $\theta' = \frac{v \text{ coſ. } \lambda \text{ ſin. } \theta}{c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta}$, differentietur, conſideratis ſeparatim v, λ, θ pro variabilibus, ſequentes prodibunt aequationes. Primum ex variabilitate ipſius θ;

$$\frac{d\theta'}{\text{coſ. } \theta'^2} = \frac{v\, d\theta \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta}{c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta} - \frac{v^2\, d\theta \text{ coſ. } \lambda^2 \text{ ſin. } \theta^2}{(c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta)^2} = \frac{v\, d\theta \text{ coſ. } \lambda (c \text{ coſ. } \theta - v \text{ coſ. } \lambda)}{(c - v \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \theta)^2};$$

vnde

vnde quum ſit

$$\frac{1}{\cos.\theta'^2} = 1 + \operatorname{tang}.\theta'^2 = \frac{c^2 - 2c\,v\cos.\lambda\cos.\theta + v^2\cos.\lambda^2}{(c - v\cos.\lambda\cos.\theta)^2},$$

fiet

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,\theta\cos.\lambda\,(c\cos.\theta - v\cos.\lambda)}{c^2 - 2c\,v\cos.\lambda\cos.\theta + v^2\cos.\lambda^2}.$$

Deinde ex variabilitate ipſius v, conſequemur:

$$\frac{d\,\theta'}{\cos.\theta'^2} = \frac{d\,v\cos.\lambda\sin.\theta}{c - v\cos.\lambda\cos.\theta} + \frac{v\,d\,v\cos.\lambda^2\sin.\theta\cos.\theta}{(c - v\cos.\lambda\cos.\theta)^2} = \frac{c\,d\,v\cos.\lambda\sin.\theta}{(c - v\cos.\lambda\cos.\theta)^2} \text{ et}$$

$$d\,\theta' = \frac{c\,d\,v\cos.\lambda\sin.\theta}{c^2 - 2c\,v\cos.\lambda\cos.\theta + v^2\cos.\lambda^2}.$$

Denique ex variabilitate ipſius λ obtinebimus:

$$\frac{d\,\theta'}{\cos.\theta'^2} = -\frac{v\,d\lambda\sin.\lambda\sin.\theta}{c - v\cos.\lambda\cos.\theta} - \frac{v^2\,d\,\lambda\sin.\lambda\cos.\lambda\sin.\theta\cos.\theta}{(c - v\cos.\lambda\cos.\theta)^2} \text{ ſiue}$$

$$\frac{d\,\theta'}{\cos.\theta'^2} = \frac{-v\,d\,\lambda\sin.\lambda\sin.\theta}{(c - v\cos.\lambda\cos.\theta)^2} \text{ et}$$

$$d\,\theta' = -\frac{c\,v\,d\,\lambda\sin.\lambda\sin.\theta}{c^2 - 2c\,v\cos.\lambda\cos.\theta + v^2\cos.\lambda^2}.$$

Hinc coniunctim ſumtis his differentialibus fiet:

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,\theta\cos.\lambda}{u'^2}(c\cos.\theta - v\cos.\lambda) + \frac{c\,d\,v\cos.\lambda\sin.\theta}{u'^2}$$
$$- \frac{c\,v\,d\,\lambda}{u'^2}.\sin.\lambda\sin.\theta.$$

§. 5. Nunc pro determinando differentiali ipſius λ', differentietur aequatio $\sin.\lambda' = \frac{v}{u}\sin.\lambda$, ex quo fiet:

$$d\,\lambda'.\cos.\lambda' = \frac{u\,d\,v - v\,d\,u}{u^2}\sin.\lambda + \frac{v\,d\lambda}{u}\cos.\lambda,$$

tumque ob $u\cos.\lambda' = u'$ erit

$$d\,\lambda' = \frac{u\,d\,v - v\,d\,u}{u\,u'}\sin.\lambda + \frac{v\,d\lambda}{u'}\cos.\lambda;$$

hinc quum ſit

$$u^2 = c^2 + v^2 - 2c\,v\cos.\lambda\cos.\theta;$$

pro-

prodibit:

$$u\,d\,u = v\,d\,v - c\,d\,v\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta + c\,v\,d\lambda\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta$$
$$+ c\,v\,d\,\theta\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta,$$

ideoque

$$d\lambda' = \frac{v\,d\lambda\,\text{coſ.}\,\lambda}{u'} + \frac{d\,v\,.\,\text{ſin.}\,\lambda}{u'} - u\,d\,u\,.\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\lambda}{u^2\,u'} = \frac{v\,d\lambda\,\text{coſ.}\,\lambda}{u'} + \frac{d\,v\,.\,\text{ſin.}\,\lambda}{u'}$$
$$- \frac{v\,\text{ſin.}\,\lambda}{u^2\,u'}(v\,d\,v - c\,d\,v\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta + c\,v\,d\lambda\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta$$
$$+ c\,v\,d\,\theta\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta)$$
$$= \frac{v\,d\lambda}{u^2\,u'}(u^2\,\text{coſ.}\,\lambda - c\,v\,\text{ſin.}\,\lambda^2\,\text{coſ.}\,\theta)$$
$$+ \frac{c\,d\,v\,\text{ſin.}\,\lambda}{u^2\,u'}(c - v\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta) - \frac{c\,v^2\,d\,\theta}{u^2\,u'}\,.\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta.$$

Caeterum quia eſt tang. $\lambda' =$ tang. $\lambda \frac{\text{ſin.}\,\theta'}{\text{ſin.}\,\theta}$, per differentiationem huius aequationis quoque differentiale ipſius λ', per differentialia ipſorum θ, v et λ dabitur, quod tamen minus commode fieri videtur, quam iſta ratione, quam modo adhibuimus.

§. 6. Vlterius ſequitur vt disquiramus de valoribus differentialium $d\,\theta$, $d\,\lambda$, $d\,v$, per variationes in Elementis orbitae determinandis. Primum igitur quia eſt $\theta = \text{N} - l - \eta$, erit $d\,\theta = d\,\text{N} - d\,\eta$, ideoque ex variabilitate in Longitudine Nodi conſequimur $d\,\theta = d\,\text{N}$. Porro quia eſt

$$\text{tang.}\,\eta = \text{tang.}\,(\Phi + \Pi)\,\text{coſ.}\,i, \text{ erit}$$
$$\frac{d\,\eta}{\text{coſ.}\,\eta^2} = - d\,i\,.\,\text{ſin.}\,i\,\text{tang.}\,(\Phi + \Pi);$$

hincque

$$d\,\theta = - d\,\eta = d\,i\,\text{ſin.}\,i\,\text{tang.}\,(\Phi + \Pi)\,\text{coſ.}\,\eta^2$$
$$= d\,i\,.\,\text{tang.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\eta, \text{ ob}$$
$$\text{ſin.}\,i\,\text{ſin.}\,(\Phi + \Pi) = \text{ſin.}\,\lambda \text{ et } \text{coſ.}\,(\Phi + \Pi) = \text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\eta,$$

 hinc

hinc differentiale ipſius $d\theta$ per variationem inclinationis orbitae determinatur, eritque $d\theta = di.$ tang. λ coſ. η. Deinde fiet

$$\frac{d\eta}{coſ.\,\eta^2} = \frac{d\Pi.\,coſ\,i}{coſ.\,(\Phi+\Pi)^2} \text{ et } d\eta = \frac{d\Pi\,coſ.\,i.\,coſ.\,\eta^2}{coſ.\,(\Phi+\Pi)^2} = \frac{d\Pi\,coſ.\,i}{coſ.\,\lambda^2},$$

hincque

$$d\theta = -\frac{d\Pi\,coſ.\,i}{coſ.\,\lambda^2}, \text{ ſimilique ratione } d\theta = -\frac{d\Phi\,coſ.\,i}{coſ.\,\lambda^2},$$

vnde ratio qua $d\theta$ per differentialia $d\Pi$, $d\Phi$ determinatur eſt manifeſta. Denique quum ſit ſin. $\lambda =$ ſin. $(\Phi+\Pi)$ ſin. i; fiet ex variabilitate ipſius i,

$$d\lambda = \frac{di.\,coſ.\,i\,ſin.\,(\Phi+\Pi)}{coſ.\,\lambda} = di.\,\text{cot.}\,i\,\text{tang.}\,\lambda = di\,\text{ſin.}\,\eta,$$

ex variabilitate ipſius Π,

$$d\lambda = \frac{d\Pi\,coſ.\,(\Phi+\Pi)\,ſin.\,i}{coſ.\,\lambda} = d\Pi.\,\text{ſin.}\,i\,\text{coſ.}\,\eta;$$

ſimilique ratione ex variabilitate ipſius Φ,

$$d\lambda = d\Phi.\,\frac{coſ.\,(\Phi+\Pi)\,ſin.\,i}{coſ.\,\lambda} = d\Phi.\,\text{ſin.}\,i\,\text{coſ}\,\eta.$$

§. 7. Iam vero adhuc reſtat, vt oſtendamus quomodo differentialia anguli Φ et diſtantiae v per variationes in Elementis orbitae, vtpote Tempore Perihelii, ſemiparametro orbitae et excentricitate eiusdem, determinentur. Conſtat igitur quod ſi ſemiparameter orbitae per b, excentricitas autem per e indicetur, eſſe debeat $v = \frac{b}{1+e\,coſ.\,\Phi}$, computatis nimirum angulis anomaliae a Perihelio. Tum vero ſi T deſignet tempus praeterlapſum a tempore Perihelii vsque ad id momentum, quo Cometa obſeruatus fuerit in C; μ autem exprimat numerum, quo motus medius Solis ad tempus reducitur, ex proprietatibus orbitarum Cometarum et Planetarum notum eſt, eſſe

T =

$$T = \mu b \sqrt{b} \int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}.$$

Hinc itaque per variationem in tempore Perihelii fiet

$$dT = \frac{\mu b \sqrt{b}.\, d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} \text{ hincque}$$

$$d\Phi = \frac{dT (1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{\mu b \sqrt{b}} = \frac{dT.\,\sqrt{b}}{\mu v^2}.$$

Tum ex variabilitate ſemiparametri orbitae conſequimur:

$$-\frac{3\,T\,db}{2\mu b^{5:2}} = \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{v^2\, d\Phi}{b^2}, \text{ hincque } d\Phi = -\frac{3\,T\,db}{2\mu v^2 \sqrt{b}}.$$

Denique ex variabilitate excentricitatis e, haec prodibit aequatio:

$$\frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} - 2\,de \int \frac{d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^3} = 0,$$

cuius aequationis loco etiam haec adhiberi poteſt:

$$\frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = -\frac{2\,de}{e}\left(\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^3} - \int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}\right).$$

§. 8. Quum nunc ſit:

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^3} = \frac{1}{2(1 - e^2)}\left(\frac{-e\,\text{ſin.}\,\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + 3\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} - \int \frac{d\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi}\right)$$

et

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{1}{1 - e^2}\left(\frac{-e\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi} + \int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}\right), \text{ fiet}$$

$$\int \frac{d\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi} = (1 - e^2)\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \frac{e\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

quamobrem hoc valore ſubſtituto prodibit:

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^3} = \frac{1}{2(1 - e)}\left(\frac{-e\,\text{ſin.}\,\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + 3\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} - (1 - e^2)\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{e\,\text{ſin.}\,\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}\right) = \frac{1}{2(1 - e^2)}\left(-2\,\text{ſin.}\,\Phi \frac{(2 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + (2 + e^2)\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}\right),$$

hincque demum:

$$\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^3} - \int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{1}{2(1 - e^2)}\left(-e\,\text{ſin.}\,\Phi \frac{(2 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + 3e^2 \int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}\right),$$

adeoque

$$\frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = + \frac{de}{2(1 - e^2)}\left(\frac{\text{ſin.}\,\Phi (2 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} - 3e\int \frac{d\Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}\right)$$

$$= \frac{de}{(1 - e^2)}\left(\frac{v^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{b^2}(2 + e\,\text{coſ.}\,\Phi) - \frac{3\,e\,T}{\mu b \sqrt{b}}\right), \text{ ſiue}$$

$d\Phi$

$$d\Phi = \frac{de}{(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi) - \frac{3eT(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{\mu b\sqrt{b}}\right)$$
$$= \frac{de}{(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi) - \frac{3eT\sqrt{b}}{\mu v^2}\right)$$
$$= \frac{de}{(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi\left(1+\frac{b}{v}\right) - \frac{3Te\sqrt{b}}{\mu v^2}\right).$$

§. 9. Iam propter $v = \frac{b}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}$, pro differentiali ipſius v, ex variabilitate ipſorum b, e et Φ, ſequentes habentur determinationes. 1°. ex variabilitate ipſius b:

$$dv = \frac{db}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{v\,db}{b};$$

2°. ex variabilitate ipſius e,

$$dv = -\frac{b\,de\,\text{coſ.}\,\Phi}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = -\frac{v^2\,de\,\text{coſ.}\,\Phi}{b},$$

et demum ex variabilitate ipſius Φ:

$$dv = +\frac{be\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{v^2 e\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{b}.$$

Vnde ſi valores ipſius $d\Phi$ per dT, db et de in §§. praecedentibus expreſſi ſubſtituantur, conſequemur:

1°. $dv = \frac{v\,db}{b} - \frac{3eT\,db\,\text{ſin.}\,\Phi}{2\mu v\sqrt{b}}$;

2°. $dv = \frac{e\,dT\,\text{ſin.}\,\Phi}{\mu\sqrt{b}}$ et

3°. $dv = -\frac{v^2\,de\,\text{coſ.}\,\Phi}{b} + \frac{v^2 e\,de\,\text{ſin.}\,\Phi}{b(1-e^2)}\left(\text{ſin.}\,\Phi(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi) - \frac{3eT\sqrt{b}}{\mu v^2}\right)$

$$= \frac{v^2\,de}{b}\left(-\text{coſ.}\,\Phi + \frac{e\,\text{ſin.}\,\Phi^2(2+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(1-e^2)}\right) - \frac{3Te^2\,de\,\text{ſin.}\,\Phi}{\mu(1-e^2)\sqrt{b}}.$$

§. 10. Quum igitur ſupra §. §. 4. 5. differentialia ipſorum θ' et λ', per differentialia ipſorum θ, λ et v inuenerimus expreſſa, nuncque §. §. 6. 8. et 9. oſtenderimus, qua ratione iſta differentialia $d\theta$, $d\lambda$, dv ex variabilitate Elementorum Cometae, N, i, Π, T, b, e deriuentur, facile patet quomodo ſubſtitutione facta, variationes ipſorum θ' et λ', ex variationibus elementorum orbitae deriuare liceat. Verum facile patet, ſi ſingulorum horum differentia-

tialium reſpectum ſimul habere voluerimus, tum formulas nimis prodituras fore complicatas, quare vt eo dilucidius iudicium formari queat, quanta variatio in loco Cometae Geocentrico producatur ex variatione vniuscuiusque Elementi. ſingula haec Elementa ſeorſim contemplabimur. Initio igitur facto a Longitudine Nodi, conſtat angulum λ et diſtantiam v per eius immutationem nihil affici, pro θ autem habebimus $d\,\theta = d\,N$, vnde per §. §. 4. et 5. conſequemur:

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,N\,\text{coſ.}\,\lambda}{u'^2}\,(c\,\text{coſ.}\,\theta - v\,\text{coſ.}\,\lambda) \text{ et}$$

$$d\,\lambda' = -\frac{c\,v^2\,d\,N}{u'^2}\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\lambda.$$

§. 11. Hinc igitur concludimus errorem in Longitudine Geocentrica, ex variatione in loco Nodi, eſſe in compoſita ratione directa, quantitatum, v, coſ. λ, c coſ. $\theta - v$ coſ. λ et inuerſa ipſius u'^2, ex quo colligitur hunc errorem eo maiorem eſſe quo diſtantia u Cometae a tellure fuerit minor, id quod generatim valet de ſingulis erroribus, ſiue Longitudinis ſeu Latitudinis Geocentricae ex quocunque capite oriantur. Porro hic error eo maior erit, quo longius Cometa a Sole fuerit remotus, et viciſſim quo propius Cometa ad Solem verſetur, eo minor hic euadet error. Deinde $d\,\theta$ eo euadet maior, quo minor fuerit Latitudo Heliocentrica, quia coſ. λ eo maiorem conſequitur valorem, quo angulus λ eſt minor. Denique differentiale $d\,\theta$ increſcit cum coefficiente c coſ. $\theta - v$ coſ. λ, contra autem decreſcit, hoc coefficiente minuto; immo vbi c coſ $\theta = v$ coſ. λ, differentiale $d\,\theta$ plane euaneſcit, quare ſi diſtantia curtata S c fuerit minor diſtantia Solis a Terra, angulus autem θ ita conſtituatur, vt ducta a T ad S c per-

pendiculari, illa praeciſe in punctum c incidat, maxima variatio in Longitudine Nodi, vix quidpiam in loco Cometae Geocentrico immutabit. Hinc itaque concludimus pro determinanda Longitudine Nodi illas obſeruationes praecipue eſſe adhibendas, in quibus Cometa telluri quam maxime fuerit propinquus, inprimis ſi pro eodem tempore a Sole longius diſtet, tumque is ſitus maxime erit favorabilis, vbi Cometa cum Sole fuerit in oppoſitione, ſiquidem tunc c coſ. $\theta - v$ coſ. λ valorem conſequetur maximum, poſito quod v coſ. $\lambda > c$.

§. 12. Variatio Latitudinis Geocentricae erit in ratione compoſita directa quantitatum c, v^2, ſin. θ, ſin. 2λ, et inuerſa ipſorum u^2, u'. Hinc igitur colligitur hanc variationem augeri prout diſtantia tam telluris, quam Cometae a Sole augetur; deinde haec variatio augetur cum angulis θ et 2λ increſcentibus, maximumque adipiſcetur valorem vbi $\theta = 90°$ et $\lambda = 45°$. Viciſſim autem variatio in Longitudine Nodi ex errore in loco Geocentrico eo euadet minor, quo minus fuerit productum $u^2 u'$, et quo maius $c v^2$ ſin. θ ſin. 2λ, ſeu quo longius Cometa a Sole fuerit remotus, tumque propius anguli θ et 2λ ad $90°$ accedunt. Reſpectu igitur errorum in Latitudine Geocentrica caſus fauorabiles pro Longitudine Nodi non prorſus coincidunt, cum illis, qui errores ſupponunt in Longitudine Geocentrica commiſſos. Vtrobique quidem requiritur, vt diſtantia v quam fieri poſſit ſit maxima, verum in priori deſideratur vt anguli θ et λ, quam minimi ſint, cum contra in poſteriori poſtuletur, vt anguli θ et 2λ quam proxime ad $90°$ accedant.

§. 13.

§. 13. Pro variatione anguli θ' ex errore in aeſtimando valore anguli i commiſſo, duplex habetur expreſſio tam ex differentiali $d\theta$, quam $d\lambda$ reſultans, per priorem fit:

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,i\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\eta}{u'^2}\,(c\,\text{coſ.}\,\theta - v\,\text{coſ.}\,\lambda);$$

poſterior vero praebet

$$d\,\theta' = -\frac{c\,v\,d\,i}{u'^2}\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{tang.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{cot.}\,i$$
$$= -\frac{c\,v\,d\,i}{u'^2}\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,q,$$

ob tang. λ cot. $i =$ ſin. q, hinc coniunctim fiet:

$$d\,\theta' = \frac{c\,v\,d\,i}{u'^2}\,\text{ſin.}\,\lambda(\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\eta - \text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\eta) - \frac{v^2\,d\,i}{u'^2}\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\eta$$
$$= \frac{v\,d\,i}{u'^2}\,\text{ſin.}\,\lambda\,(c\,\text{coſ.}\,(\theta + \eta) - v\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\eta)$$
$$= \frac{v\,d\,i}{u'^2}\,\text{ſin.}\,\lambda\,(c\,\text{coſ.}\,(N - l) + v\,\text{coſ.}\,(\Phi + \Pi)).$$

Error igitur in angulo θ' erit in ratione compoſita directa quantitatum v, ſin. λ et c coſ. $(N - l) - v$ coſ. $(\Phi + \Pi)$, inuerſa autem ipſius u'^2; hincque colligitur hunc errorem increſcere pro aucta diſtantia Cometae a Sole, imminuta vero eius diſtantia a terra, tumque eundem augeri pro aucta Latitudine Heliocentrica. Patet quoqne ſimul hunc errorem plane euaneſcere vbi fuerit

$$c\,\text{coſ.}\,(N - l) = v\,\text{coſ.}\,(\Phi + \Pi),$$

quod eueniet, vbi lineae perpendiculares ex punctis T et C in lineam nodorum N S demiſſae in idem incidant punctum, conſtituentque tunc hae lineae perpendiculares inter ſe angulum aequalem inclinationi orbitae. Hinc concluditur caſus maxime fauorabiles pro determinanda inclinatione orbitae, illos eſſe, vbi Cometa telluri quam proximus ſit, a Sole autem longius remotus, Latitudinem Heliocen-

tricam habeat inſignem, et coefficiens c coſ. $(N - l)$ $- v$ coſ. $(\Phi + \Pi)$ ſatis magno adficiatur valore.

§. 14. Pro errore in angulo λ' ex variata inclinatione orbitae conſequimur per §§. 5, 6:

$$d\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u^2\,u'} \text{ ſin. } \eta\,(u^2 \text{ coſ. } \lambda - c\,v \text{ ſin. } \lambda^2 \text{ coſ. } \theta)$$
$$- \frac{c\,v^2\,d\,i}{u^2\,u'} \text{ ſin. } \lambda^2 \text{ ſin. } \theta \text{ coſ. } \eta,$$

ſubſtitutis ſcilicet pro $d\,\theta$ et $d\,\lambda$ eorum valoribus $d\,i$ tang. λ coſ. η et $d\,i$ ſin. η, hincque fiet:

$$d\,\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u'} \text{ ſin. } \eta \text{ coſ. } \lambda - \frac{c\,v^2\,d\,i \,.\, \text{ſin.}\,\lambda^2}{u^2\,u'} \,.\, \text{ſin. } (\eta + \theta)$$
$$= \frac{v\,d\,i}{u'} \text{ ſin. } \eta \text{ coſ. } \lambda - \frac{c\,d\,i}{u'} \text{ ſin. } \lambda'^2 \text{ ſin. } (\eta + \theta).$$

Praeterea quum ſit

$$\text{ſin. } \eta \text{ coſ. } \lambda = \text{tang. } \eta \text{ coſ. } \lambda \text{ coſ. } \eta = \text{ſin. } (\Phi + \Pi) \text{ coſ. } i, \text{ ob}$$
$$\text{tang. } \eta = \text{tang. } (\Phi + \Pi) \text{ coſ. } i \text{ et}$$
$$\text{coſ. } \lambda \text{ coſ. } \eta = \text{coſ. } (\Phi + \Pi);$$

tumque

$$\text{ſin. } \lambda^2 = \text{ſin. } (\Phi + \Pi)^2 \text{ ſin. } i^2,$$

fiet:

$$d\,\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u'} \text{ ſin.} (\Phi + \Pi) (\text{coſ.} i - \frac{c\,v}{u^2} \text{ſin.} (\Phi + \Pi) \text{ ſin. } i^2 \text{ ſin.} (\eta + \theta)).$$

Hincque iterum concluditur obſeruationes pro determinanda inclinatione orbitae optimas eſſe, vbi $\Phi + \Pi = 90°$, ſeu latitudo Heliocentrica ipſi inclinationi orbitae aequatur.

§. 15. Procedamus nunc ad errores angulorum θ', λ', ex variatione in angulo Π, ſeu elongatione Perihelii a Nodo, deriuandos. Subſtituto igitur §. 4, loco $d\,\theta$,

$-\frac{d\Pi\, coſ.\, i}{coſ.\, \lambda^2}$ et inuicem ipſius $d\lambda$, $d\Pi$ ſin. i coſ. η, habebimus:

$$d\theta' = -\frac{v\, d\, \Pi\, coſ.\, i}{u'^2\, coſ.\, \lambda}(c\, \text{coſ.}\, \theta - v\, \text{coſ.}\, \lambda)$$
$$-\frac{c\, v\, d\, \Pi}{u'^2}\, \text{ſin.}\, i\, \text{coſ.}\, \eta\, \text{ſin.}\, \lambda\, \text{ſin.}\, \theta$$
$$= \frac{v\, d\, \Pi}{u'^2}\left(v\, \text{coſ.}\, i - \frac{c}{ſin.\, (\Phi + \Pi)}(\text{ſin.}\, \eta\, \text{coſ.}\, \theta + \text{ſin.}\, \lambda^2\, \text{coſ.}\, \eta\, \text{ſin.}\, \theta)\right),$$

ob coſ. $i\, \frac{tang.\, \eta}{tang.\, (\Phi + \Pi)}$ et coſ. η coſ. λ = coſ. $(\Phi + \Pi)$, nec non ſin. $i\, \frac{ſin.\, \lambda}{ſin.\, (\Phi + \Pi)}$. In §. 5. autem ſuffectis pro $d\theta$ et $d\lambda$ eorum valoribus, fiet:

$$d\lambda' = \frac{v\, d\, \Pi\, ſin.\, i\, coſ.\, \eta}{u^2\, u'}(u^2\, \text{coſ.}\, \lambda - c\, v\, \text{ſin.}\, \lambda^2\, \text{coſ.}\, \theta)$$
$$+ \frac{c\, v^2\, d\, \Pi}{u^2\, u'}\, .\, \text{coſ.}\, i\, \text{tang.}\, \lambda\, \text{ſin.}\, \theta = \frac{v\, d\, \Pi}{u'}\, \text{ſin.}\, i\, \text{coſ.}\, (\Phi + \Pi)$$
$$+ \frac{c\, v^2\, d\, \Pi}{u^2\, u'}\, \text{ſin.}\, i\, (\text{ſin.}\, \eta\, \text{ſin.}\, \theta - \text{ſin.}\, \lambda^2\, \text{coſ.}\, \eta\, \text{coſ.}\, \theta);$$

ob tang. $i = \frac{tang.\, \lambda}{ſin.\, \eta}$.

§. 16. Quia eſt $d\theta = -\frac{d\Phi\, coſ.\, i}{coſ.\, \lambda^2}$ et $d\Phi = \frac{d\, T\, .\, \sqrt{b}}{\mu\, v^2}$ §. 7, fiet $d\theta = -\frac{d\, T\, \sqrt{b}\, .\, coſ.\, i}{\mu\, v^2\, coſ.\, \lambda^2}$, ſimiliterque

$$d\lambda = d\Phi\, \frac{coſ.\, (\Phi + \Pi)\, ſin.\, i}{coſ.\, \lambda} = d\, T\, \frac{\sqrt{b}\, coſ.\, (\Phi + \Pi)\, ſin.\, i}{\mu\, v^2\, coſ.\, \lambda}$$
$$= \frac{d\, T\, \sqrt{b}\, ſin.\, i\, coſ.\, \eta}{\mu\, v^2}.$$

Hinc obtinebimus:

$$d\theta' = -\frac{v\, d\, T\, \sqrt{b}\, .\, coſ.\, i}{\mu\, v\, u'^2\, coſ.\, \lambda}(c\, \text{coſ.}\, \theta - v\, \text{coſ.}\, \lambda) + \frac{c\, e\, d\, T\, ſin.\, \Phi}{\mu\, \sqrt{b}\, u'^2}\, .\, \text{coſ.}\, \lambda\, \text{ſin.}\, \theta$$
$$-\frac{c\, d\, T\, \sqrt{b}}{\mu\, v\, u'^2}\, \text{ſin.}\, i\, \text{coſ.}\, \eta\, \text{ſin.}\, \lambda\, \text{ſin.}\, \theta.$$

Vlterius fiat:

$$d\lambda' = \frac{d\, T\, \sqrt{b}\, ſin.\, i\, coſ.\, \eta}{\mu\, v\, u^2\, u'}(u^2\, \text{coſ.}\, \lambda - c\, v\, \text{ſin.}\, \lambda^2\, \text{coſ.}\, \theta)$$
$$+ \frac{c\, e\, d\, T\, ſin.\, \lambda\, ſin.\, \Phi}{\mu\, \sqrt{b}\, u^2\, u'}(c - v\, \text{coſ.}\, \lambda\, \text{coſ.}\, \theta)$$
$$+ \frac{c\, d\, T\, \sqrt{b}\, coſ.\, i}{\mu\, u^2\, u'\, coſ.\, \lambda}\, \text{ſin.}\, \lambda\, \text{ſin.}\, \theta.$$

Vix autem vllus ſuppetit modus, quo hae formulae ad concinniorem redigi poſſent formam.

§. 17. Nunc quum per §§. 7 et 9. ſit

$$d\Phi = -\frac{3\,T\,d\,b}{2\,\mu\,v^2\sqrt{b}} \text{ et } d\,v = \frac{v\,d\,b}{b} - \frac{3\,e\,T\,d\,b\,\sin.\Phi}{2\,\mu\,b\sqrt{b}},$$

obtinebimus pro $d\,\theta'$ hunc valorem:

$$d\,\theta' = \frac{3\,T\,d\,b\cos.i\,(c\cos.\theta - v\cos.\lambda)}{2\,\mu\,v\,u'^2\sqrt{b}\,.\cos.\lambda} + \frac{c\,d\,b\cos.\lambda\sin.\theta}{b\,u'^2}\left(v - \frac{3\,e\,T\sin.\Phi}{2\,\mu\sqrt{b}}\right)$$
$$+ \frac{3\,T\,c\,d\,b\sin.\lambda}{2\,\mu\,v\,u'^2\sqrt{b}}\,.\sin.\theta\sin.i\cos.\eta,$$

et pro $d\,\lambda'$ iſtum:

$$d\,\lambda' = -\frac{3\,T\,d\,b\sin.i\cos.\eta}{2\,\mu\,v\,u^2\,u'\sqrt{b}}\left(u^2\cos.\lambda - c\,v\sin.\lambda^2\cos.\theta\right)$$
$$+ \frac{c\,d\,b\sin.\lambda}{b\,u^2\,u'}\left(c - v\cos.\lambda\cos.\theta\right)\left(v - \frac{3\,c\,T\sin.\Phi}{2\,\mu\sqrt{b}}\right)$$
$$- \frac{3\,T\,c\,d\,b\operatorname{tang}.\lambda\sin.\theta\cos.i}{2\,\mu\,u^2\,u'\sqrt{b}}.$$

Denique pro variationibus angulorum θ' et λ', ex variatione in excentricitate orbitae oriundis, hae habentur formulae:

$$d\,\theta' = -\frac{v\,d\,e\cos.i}{(1-e^2)\,u'^2\cos.\lambda}\left(c\cos.\theta - v\cos.\lambda\right)\left(\sin.\Phi\,(2 + e\cos.\Phi) - \frac{3\,e\,T\sqrt{b}}{\mu\,v^2}\right)$$
$$+ \frac{c\,d\,e\cos.\lambda\sin.\theta}{u'^2}\left(\frac{v^2}{b}\left(-\cos.\Phi + \frac{e\sin.\Phi^2\,(2 + e\cos.\Phi)}{(1-e^2)}\right) - \frac{3\,T\,e^2\sin.\Phi}{\mu\,(1-e^2)\sqrt{b}}\right)$$
$$- \frac{c\,v\,d\,e}{u'^2\,(1-e^2)}\sin.\lambda\sin.\theta\sin.i\cos.\eta\left(\sin.\Phi\,(2 + e\cos.\Phi) - \frac{3\,e\,T\sqrt{b}}{\mu\,v^2}\right).$$

$$d\,\lambda' = \frac{v\,d\,e\sin.i\cos.\eta}{(1-e^2)\,u^2\,u'}\left(u^2\cos.\lambda - c\,v\sin.\lambda^2.\cos.\theta\right)\left(\sin.\Phi\,(2 + e\cos.\Phi) - \frac{3\,e\,T\sqrt{b}}{\mu\,v^2}\right)$$
$$+ \frac{c\,d\,e\sin.\lambda}{u^2\,u'}\left(c - v\cos.\lambda\cos.\theta\right)\left(\frac{v^2}{b}\left(-\cos.\Phi + \frac{e\sin.\Phi^2\,(2 + e\cos.\Phi)}{(1-e^2)}\right) - \frac{3\,T\,e^2\sin.\Phi}{\mu\,(1-e^2)\sqrt{b}}\right)$$
$$+ \frac{c\,v^2\,d\,e\operatorname{tang}.\lambda}{(1-e^2)\,u^2\,u'}\sin.\theta\cos.i\left(\sin.\Phi\,(2 + e\cos.\Phi) - \frac{3\,e\,T\sqrt{b}}{\mu\,v^2}\right).$$

§. 18. Quo adplicatio formularum noſtrarum eo euidentior euadat, eam vno vel altero Exemplo illuſtrare placet. Supponamus igitur quaeſtionem eſſe de Longitu-

dine

dine Geocentrica Cometae Anno 1773 obſeruati, pro die 14 Aprilis 1774, $9^h. 35'. 25''$ Temp. medio Pariſino, tum vero ſi ſequentia huius cometae Elementa in vſum vocentur:

Longitudo Nodi $= N = 4^s.\ 1^\circ.\ 8'.\ 20''$,
Inclinatio orbitae $= i =\ 61.\ 15.\ 11.$
Elongat. Perih. Nodo $= \Pi =\ 45.\ 51.\ 20$,

Log. Semipar. $=$ Log. $b = 0,\ 3539907$,
Log. Excentric. $=$ Log. $e = 0,\ 0010801$,
Temp. Perihel. 1773. Sept. 5, 5911,

quia pro hoc tempore eſt $l = 6^s.\ 24^\circ.\ 57'.\ 16''$, fiet $l - N = 83^\circ.\ 48'.\ 56''$. Praeterea ex dato tempore Perihelii et momento obſeruationis colligitur angulus $\Phi = 107.\ 53.\ 47$, hinc ob $\Pi = 45^\circ.\ 51'.\ 20''$, fiet $\Phi - \Pi = 62.\ 2.\ 27$, tumque erit $v = 3,\ 2655200$. Vlterius habebitur $\eta = 42^\circ.\ 10'.\ 42''$, per formulam Tang. $(\Phi - \Pi)$ coſ. i et $\lambda = 50^\circ.\ 45'.\ 9''$, per formulam ſin. $\lambda =$ ſin $(\Phi - \Pi)$ ſin. i, tumque v coſ. $\lambda = 2,\ 0660019$. Ex his autem concludetur $\theta = l - N - \eta = 41^\circ.\ 38'\ 14''$, vnde ob $c = 1,\ 0043982$, demum obtinebimus $\theta' = 68^\circ.\ 32'.\ 13''$, hincque Longitudo Cometae Geocentrica $4^s.\ 16^\circ.\ 25'.\ 3''$.

§. 19. Si iam Longitudinem Nodi $5'$ augeamus, caeterumque calculum modo indicato repetamus, inueniemus pro angulo θ', $68^\circ.\ 26'.\ 2''$, ita vt Longitudo Cometae hinc oriatur $4^s.\ 16^\circ.\ 31.\ 18''$. Nunc igitur diſpiciamus an idem ex noſtra formula

$$d\,\theta' = \frac{v\,d\,N\,\text{coſ.}\,\lambda}{u'^2}\,(c\ \text{coſ.}\ \theta - v\ \text{coſ.}\ \lambda)$$

ſequatur: Habetur autem per formulum $u' = \frac{v\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\theta'}$, ob

Log.

$\text{Log.}\, v\, \text{coſ.}\, \lambda = 0,3151307$	$v\, \text{coſ.}\, \lambda = 2,0660019$
$\text{Log. ſin.}\, \theta = 9,8224874$	$c\, \text{coſ.}\, \theta = 0,7516237$
$0,1375681$	$v\, \text{coſ.}\, \lambda - c\, \text{coſ.}\, \theta = 1,3143782$
$\text{Log. ſin.}\, \theta' = 9,9687880$	$\text{L.}(v\, \text{coſ.}\, \lambda - c\, \text{coſ.}\, \theta) = 0,1187205$
$\text{Log}\, u' = 0,1687801$	$\text{Log.}\, v\, \text{coſ.}\, \lambda = 0,3151307$
$2\, \text{Log.}\, u' = 0,3375602$	$\text{Log. Num.} = 0,4338512$
	$\text{Log. Denom.} = 0,3375602$
	$0,0962910$

Ideoque numerus per quem multiplicari debet variatio in Longitudine Nodi, vt prodeat variatio in angulo θ', erit 1,2482, hincque prodibit pro variatione anguli $374''$, vno tantum ſcrupulo ſecundo diuerſa ab illa, quam calculo inuenimus. Caeterum hac occaſione obſeruare conuenit, ad calculum facilitandum praeſtare, ſi loco formulae,

$$d\,\theta' = \frac{v\, \text{coſ.}\, \lambda\, dN(c\, \text{coſ.}\, \theta - v\, \text{coſ.}\, \lambda)}{u'^2},$$

iſta adhibeatur:

$$d\,\theta' = \frac{dN.\, \text{ſin.}\, \theta'^2 (c\, \text{coſ.}\, \theta - v\, \text{coſ.}\, \lambda)}{v\, \text{ſin.}\, \theta^2 . \text{coſ.}\, \lambda}.$$

§. 20. Vlterius pro variatione in Latitudine Geocentrica, loco formulae ſupra allatae

$$d\,\lambda' = -\frac{c v^2 dN}{u^2 u'}\, \text{ſin.}\, \theta\, \text{ſin.}\, \lambda\, \text{coſ.}\, \lambda,$$

vſum faciamus huius

$$d\,\lambda' = -\frac{c\, dN\, \text{ſin.}\, \theta'\, \text{ſin.}\, \lambda'^2}{v\, \text{ſin.}\, \lambda}, \text{ ob}$$

$$u^2 : v^2 = \text{ſin.}\, \lambda^2 : \text{ſin.}\, \lambda'^2 \text{ et } u' : v\, \text{coſ.}\, \lambda = \text{ſin.}\, \theta : \text{ſin.}\, \theta'.$$

Hinc pro caſu praeſenti, vbi $\lambda' = 59^\circ . 44' . 50''$, calculus erit:

Log.

$$\begin{array}{rl} \text{Log.}\,v = & 0,5139524 \\ \text{L.ſin.}\,\lambda = & 9,8889763 \\ \hline & 0,4029287 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log.}\,c = & 0,0019060 \\ \text{L.ſin.}\,\theta' = & 9,9687880 \\ 2\,\text{L.ſin.}\,\lambda' = & 9,8728376 \\ \hline \text{L.Num.} = & 9,8435316 \\ \text{L.Denom.} = & 0,4029287 \\ \hline & 0,4406029 \\ \text{L.}\,d\text{N} = & 2,4771213 \\ \hline \text{L.}\,d\lambda' = & 1,9177242 \end{array}$$

Ex quo colligitur $d\lambda' = + 83''$, quia pro noſtro caſu eſt $\theta = l - \text{N} - \eta$ ideoque $d\theta = - d\text{N}$, computo autem reapſe inſtituto, inuenitur $\lambda' = 59°.\ 46'.\ 14''$, $84''$ a priori valore diuerſus.

§. 21. Supponamus nunc inclinationem orbitae quinque Minutis primis augeri, ita vt eſſe debeat $61°.\ 20'.\ 11''$, atque ſecundum formulam §. 13. expoſitam habebimus:

$$\begin{array}{rl} \text{L.}\,v = & 0,5139524 \\ \text{L.coſ.}(\varphi - \Pi) = & 9,6710267 \\ \hline & 0,1849791 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{L.}\,c = & 0,0019060 \\ \text{L.coſ.}(l - \text{N}) = & 9,0323344 \\ \hline & 9,0342404 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{hinc}\ v\,\text{coſ.}(\Phi - \Pi) = & 1,5310139 \\ c\,\text{coſ.}(l - \text{N}) = & 0,1082033 \\ \hline v\,\text{coſ.}(\Phi - \Pi) - c\,\text{coſ.}(l - \text{N}) = & 1,4228106, \end{array}$$

iam ſi ponatur $v\,\text{coſ.}(\Phi - \Pi) - c\,\text{coſ.}(l - \text{N}) = \text{M}$, habebimus:

$$\begin{array}{rl} \text{L.}\,v = & 0,5139524 \\ \text{L.ſin.}\,\lambda = & 9,8889763 \\ \text{L.M} = & 0,1531471 \\ \hline & 0,5560758 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 0,5560758 \\ 2\,\text{L.}\,u' = & 0,3375602 \\ \hline & 0,2185156 \\ \text{L.}\,d\,i = & 2,4771213 \\ \hline \text{L.}\,d\,\theta' = & 2,6956369 \end{array}$$

 fiet-

fietque igitur $d\theta' = 8'.\ 16''$, computo autem reapſe inſtituto pro hac hypotheſi habetur $\theta' = 68^{\circ}.\ 40'.\ 30''$, qui a valore primitiuo $8'.\ 17''$ differt, vnde exactitudo formulae noſtrae ſatis fit manifeſta. Pro variatione autem anguli λ' ex $d\,i$ oriunda, loco formulae ſupra allatae, haec adhibeatur:

$$d\lambda' = \frac{v\,d\,i}{u'}\left(\text{ſin.}(\Phi - \Pi)\,\text{coſ.}\,i - \frac{c}{v}\,\text{ſin.}\,\lambda'^2\,\text{ſin.}(\eta + \theta)\right),$$

quae a priori deriuatur, ob

$$u^2 = \frac{v^2\,\text{ſin.}\,\lambda^2}{\text{ſin.}\,\lambda'^2},\ \text{et ſin.}\,\lambda = \text{ſin.}(\Phi - \Pi)\,\text{ſin.}\,i,$$

hinc autem calculus erit:

$\text{L.}\,c = 0{,}0019060$	$\text{L. ſin.}(\Phi - \Pi) = 9{,}9460993$
$\text{L. ſin.}(\eta + \theta) = 9{,}9974652$	$\text{L. coſ.}\,i = 9{,}6820928$
$2\,\text{L. ſin.}\,\lambda' = 9{,}8728376$	$9{,}6281921$
$9{,}8722088$	$\text{ſin.}(\Phi - \Pi)\,\text{coſ.}\,i = 0{,}42481$
$\text{L.}\,v = 0{,}5139524$	$\frac{c}{v}\,\text{ſin.}(\eta + \theta)\,\text{ſin.}\,\lambda'^2 = 0{,}22817$
$9{,}3582564$	$\text{P} = 0{,}19664$
$\text{L.}\,v = 0{,}51395$	$9{,}63884$
$\text{L. P} = 9{,}29367$	$\text{L.}\,d\,i = 2{,}97712$
$0{,}80762$	$\text{L.}\,d\lambda' = 2{,}11596$
$\text{L.}\,u' = 0{,}16878$	
$9{,}63884$	

ideoque $d\lambda' = 131'' = 2'.\ 11''$. Reapſe autem fit pro hac hypotheſi $\lambda' = 59^{\circ}.\ 47'.\ 2''$, ideoque valore primitiuo $2'.\ 12''$ maior.

§. 22.

§. 22. Vlterius procedendo ſi ſtatuamus in Elongatione Perihelii a Nodo errorem quinque minutorum primor. eſſe commiſſum, correctio pro angulis θ' et λ', ita quidem commodiſſime inueſtigari poſſe videtur, vt primum quaeſitis pro §. 4. valoribus coefficientium $-\frac{cv}{u'^2}$ ſin. λ ſin. θ et $\frac{v\, \text{coſ.}\, \lambda}{u'^2}(c\, \text{coſ.}\, \theta - v\, \text{coſ.}\, \lambda)$ multiplicetur prior per $-\frac{\text{coſ.}\, i}{\text{coſ.}\, \lambda^2}$ et poſterior per ſin. i coſ. η. Valorem igitur coefficientis $\frac{v\, \text{coſ.}\, \lambda}{u'^2}(c\, \text{coſ.}\, \theta - v\, \text{coſ.}\, \lambda)$ cum ſupra §. 19. exquiſiuimus, nunc reſtat vt de valore ipſius $\frac{cv}{u'^2}$ ſin. λ ſin. θ diſpiciamus, eſt autem:

$$\begin{aligned} \text{L.}\, v &= 0,5739524 \\ \text{L.}\, c &= 0,0019060 \\ \text{L. ſin.}\, \lambda &= 9,8889763 \\ \text{L. ſin.}\, \theta &= 9,8224374 \\ \hline & 0,2271721 \\ \text{L.}\, u'^2 &= 0,3375602 \\ \hline \text{L. B} &= 9,8896119 \end{aligned}$$

ideoque

$$\frac{v\, c\, \text{ſin.}\, \lambda\, \text{ſin.}\, \theta}{u'^2} = 0,77557.$$

Si iam coefficiens $\frac{v\, \text{coſ.}\, \lambda}{u'^2}(c\, \text{coſ.}\, \theta - v\, \text{coſ.}\, \lambda)$ indicetur per A et $\frac{cv}{u'^2}$ ſin. λ ſin. θ per B, fiet per §§. 4. 6:

$$d\,\theta' = \frac{\text{A}\, d\, \Pi\, \text{coſ.}\, i}{\text{coſ.}\, \lambda^2} - \text{B}\, d\, \Pi.\ \text{ſin.}\, i\ \text{coſ.}\, \eta,$$

vnde calculus erit:

$$L. A = 0,09629 \quad (§. 19.)$$
$$L. cof. i = 9,68209$$
$$\overline{9,77838}$$
$$L. cof. \lambda^2 = 9,60236$$
$$\overline{0,17604}$$
$$L. d\Pi = 2,47712$$
$$L. Part. I. = \overline{2,65316}$$

$$L. B = 9,88961$$
$$L. ſin. i = 9,94288$$
$$L. cof. \eta = 9,86985$$
$$\overline{9,70234}$$
$$L. d\Pi = 2,47712$$
$$L. Part. II. = \overline{2,17946}$$

Hincque fit $d\theta' = 450'' - 151'' = 299''$. quod prorſus congruit cum calculo pro hac ſuppoſitione inſtituto, quippe qui praebet $\theta' = 68°. 37'. 11''$, diſſenſu a valore primitiuo exiſtente $4'. 58''$.

§. 23. Etiamſi complicatior ſit calculus correctionis $d\theta'$ per formulam §. 15. traditam, tamen eum nihilo minus proponemus, partim vt veritas iſtius formulae hoc ſpecimine comprobetur, partim vt hoc exemplo declaretur, ad calculum adbreuiandum nihil quidem iuuare, vt formulae Analyticae penitus euoluantur, ſed potius praeſtare, vt computatis primum coefficientibus ipſorum $d\theta$, $d\lambda$, dv pro §§. 4, 5; tum denuo valores q horum differentialium per variationes Elementorum orbitae ſecundum §§. 6, 7, 9 exprimentur. Formula autem §. 15. nunc ita vtemur expreſſa:

$$d\theta' = \frac{v^2\, d\Pi\, cof.\, i}{u \cdot '}\left(1 - \frac{c\,(ſin.\eta\, cof.\theta + ſin.\lambda^2\, cof.\eta\, ſin.\theta)}{v\, cof.\, i\, ſin.(\Phi + \Pi)}\right)$$

pro qua calculus erit:

$$L. ſin. \eta = 9,8270074$$
$$L. cof. \theta = 9,8735338$$
$$\overline{9,7005412}$$

$$L. ſin. \lambda^2 = 9,7779526$$
$$L. cof. \eta = 9,8698525$$
$$L. ſin. \theta = 9,8224374$$
$$\overline{9,4702425}$$

ſin. η

$$\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta = 0,50181$$
$$\text{ſin.}\,\lambda^2\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta = 0,29529$$
$$0,79710.$$

Iam ſi breuitatis gratia $\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\lambda^2\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta$ indicetur per α, ſequens calculus erit:

$$\text{L.}\,c = 0,00190 \qquad \text{L.}\,v = 0,51395$$
$$\text{L.}\,\alpha = 9,90151 \qquad \text{L. coſ.}\,i = 9,68209$$
$$9,90341 \qquad \text{L. ſin.}\,(\Phi + \Pi) = 9,94610$$
$$0,14214 \qquad 0,14214$$
$$\text{L.}\,\beta = 9,76127$$

hinc $\beta = 0,57713$ et $1 - \beta = 0,42287$. Denique

$$\text{L.}\,v^2 = 1,02790$$
$$\text{L. coſ.}\,i = 9,68209$$
$$\text{L.}\,\beta = 9,62620$$
$$0,33619$$
$$2\,\text{L.}\,u' = 0,33756$$
$$9,99863$$
$$\text{L.}\,d\Pi = 2,47712$$
$$\text{L.}\,d\theta' = 2,47575 \text{ hincque } d\theta' = 299''.$$

§. 24. Correctionis pro Latitudine Geocentrica computus facillime inſtituetur, ſi primum exquirantur valores coefficientium, quibus $d\theta$, $d\lambda$ in §. 5. ſunt affecti, nimirum

$$-\frac{cv^2}{u^2u'}\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta = -\frac{c\,\text{ſin.}\,\theta'}{v\,\text{ſin.}\,\lambda}\,\text{ſin.}\,\lambda'^2,$$

 cuius

cuius valor §. 20. iam habetur expoſitus, tumque

$$\frac{v}{u'}\,\text{coſ.}\,\lambda - \frac{c\,v^2}{u^2\,u'}\,\text{ſin.}\,\lambda^2\,\text{coſ.}\,\theta = \frac{\text{ſin.}\,\theta'}{\text{ſin.}\,\theta} - \frac{c}{u'}\,\text{ſin.}\,\lambda'^2\,\text{coſ.}\,\theta,$$

ob $v\,\text{coſ.}\,\lambda : u' = \text{ſin.}\,\theta' : \text{ſin.}\,\theta$. Deinde pro $d\lambda$, $d\theta$ eorum valores per $d\,\Pi$ expreſſi ex §. 6. ſubſtituantur. Pro formula autem $\frac{v}{u'}\,\text{coſ.}\,\lambda - \frac{c}{u'}\,\text{ſin.}\,\lambda'^2\,\text{coſ.}\,\theta$, iam calculus erit:

L. v coſ. λ = 0, 3151307	L. c = 0, 0019060
L. u' = 0, 1687801	L. coſ. θ = 9, 8735338
	2. L. ſin. λ' = 9, 8728376
0, 1463506	9, 7482774
$\frac{v}{u'}$ coſ. λ = 1, 400718	L. u' = 0, 1687801
$\frac{c}{u'}$ ſin. λ'^2 coſ. θ = 0, 379750	
1, 020968	9, 5794973

iſtius numeri quem per B′ exprimemus Logarithmus erit Log. B′ = 0, 0090109. Vlterius pro correctione $d\lambda'$ iam habebimus:

L. A′ = 9, 44060 (§. 20.)	L. B′ = 0, 00901
L. coſ. i = 9, 68209	L. ſin. i = 9, 94288
	L. coſ. η = 9, 86985
0, 12269	9, 82174
L. coſ. λ^2 = 9, 60236	L. $d\,\Pi$ = 2, 47712
9, 52033	
L. $d\,\Pi$ = 2, 47712	L. Part. II. = 2, 29886
L. Part. I. = 1, 99745	

Hinc fit $d\lambda' = 99'' + 199'' = 298''$, eritque eius valor negatiuus ob Π pro caſu praeſenti negatiuum, quem in formulis noſtris poſitiuum aſſumſimus, computo autem reapſe inſtituto fit $\lambda' = 59^\circ.\,39'.\,53''$, ideoque a valore primitiuo

59°.

59°. 44′. 50″, 4′ 57″ diuerſus, quo ipſo exactitudo noſtrae formulae ſatis comprobatur.

§. 25. Quum variationes, quae ipſam Cometae orbitam ſpectant, Tempus nimirum Perihelii, ſemiparametrum orbitae et excentricitatem eiusdem, pro diſtantia Cometae a Sole v, mutationes quasdam producere valeant; nunc ſequitur vt diſpiciamus quomodo differentiale $d\,v$ inſeruiat ad determinanda $d\,\theta'$ et $d\,\lambda'$ Eſt vero per §. 4, $d\,\theta' = \frac{c\,d\,v\,\text{coſ}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta}{u'^2}$. Quare computetur primum coefficiens $\frac{c\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta}{u'^2}$:

L. c = 0, 0019060	9, 6255217
L. coſ. λ = 9, 8011783	2 L. u' = 0, 3375602
L. ſin θ = 9, 8224374	L. $\frac{c\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\theta}{u'^2}$ = 9, 2879615
9, 6255217	

Iam autem vt differentiale ipſius v, quod in lineis exprimitur ad menſuram angulorum reducatur, a Logarithmo fractionis modo propoſitae ſubtrahatur 4, 6855749, eritque L. C = 4, 6023866. Quum igitur pro caſu praeſenti, ſit v = 3, 26552, ſi ſupponamus $d\,v$ = 0, 0100, cuius L. = 8, 000, fiet L $d\,\theta'$ = 2, 6023, hincque $d\,\theta'$ = 400″. Computo autem reapſe ſubducto habetur θ' = 68°. 25′. 38″, qui a primitiuo valore 6′. 35″ differt. Formula igitur differentialis hic perfectam exactitudinem non ſuppeditat et maiores quidem adhuc aberrationes metuendae eſſent, ſi correctio ipſius v adhuc maior fuerit. Deinde pro coefficiente C′, quo $d\,v$ adficitur §. 5, computetur haec formula:

$$\frac{c^2\,\text{ſin.}\,\lambda'^2}{v^2\,u'\,\text{ſin.}\,\lambda}\left(1 - \frac{v}{c}\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta\right) \text{ ob } u^2 = \frac{v^2\,\text{ſin.}\,\lambda^2}{\text{ſin.}\,\lambda'^2}.$$

L. v =

$$\begin{array}{r} L.v = 0,5139524 \\ L.c = 0,0019060 \\ \hline L.\frac{v}{c} = 0,5120464 \\ L.\text{coſ.}\,\lambda = 9.8011783 \\ L.\text{coſ.}\,\theta = 9,8735338 \\ \hline 0,1867585 \end{array}$$

$$\text{hinc} \; -\frac{v}{c}\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta = -1,537300$$
$$+1 = 1,$$
$$P = -\frac{v}{c}\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\theta + 1 = -0,637300$$

Porro erit

$$\begin{array}{r} L.\frac{c}{v} = 9,4879536 \\ 2\,L\,\frac{c}{v} = 8,9759072 \\ L.\,\text{ſin.}\,\lambda'^2 = 9,8728376 \\ L.\,P = 9,7302168 \\ \hline 8,5789616 \\ 0,0577564 \\ \hline 8,5212052 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} L.\,u' = 0,1687801 \\ L.\,\text{ſin.}\,\lambda = 9,8889763 \\ \hline 0,0577564 \\ 8,5212052 \\ 4,6855749 \\ \hline L.\,C' = 3,8356303 \end{array}$$

a Logarithmo autem modo inuento ſi ſubtrahatur 4,6855749, prodit Log. C', hinc ſi pro caſu praeſenti ſupponatur $dv = 0,01$, fiet L. $d\lambda' = 1,835$, ideoque $d\lambda' = 68''$, reapſe autem eſt $\lambda' = 59°.\,43'.\,43''$, eius differentia a valore primitiuo exiſtente $67''$.

§. 26. Hinc ſi pro correctione $d\theta'$, coefficientes ipſorum $d\theta$, $d\lambda$, dv exprimantur per A, B, C et pro correctione $d\lambda'$ per A', B', C', habebimus hoc valores:

Log. A = 0, 09629;	Log, A′ = 9, 44060
Log. B = 9, 88961;	Log. B′ = 0, 00901
Log. C = 4, 60238;	Log. C′ = 3, 83563

quibus

quibus inuentis per §§. 7 et 9 diſpiciendum eſt, quantum $d\theta$, $d\lambda$, dv per dT, db et de immutentur. Primum igitur per §. 7. quum ſit $d\Phi = \frac{dT\sqrt{b}}{\mu v^2}$, pro calculo huius formulae notandum eſt eſſe L. $\mu = 1,7644012$, cui inſuper addi debet Logarithmus 4, 6855749, vnde obtinebimus:

$$\begin{array}{r} 2\,\mathrm{L}.\,v = 1,0279048 \\ \mathrm{L}.\,\mu = 1,7644012 \\ 4,6855749 \\ \hline 7,4778809 \\ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}.\,b = 0,1769954 \\ \hline \mathrm{L}.\,\frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = 2,6991145 \end{array}$$

ideoque ſit $\frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = 501$, vnde ſi ſupponatur in tempore Perihelii $\frac{1}{15}$ parte dici eſſe aberratum, erit correctio anguli $\Phi = 50''$. Deinde pro correctione dv per formulam $dv = \frac{e\,dT\,\text{ſin.}\,\Phi}{\mu\sqrt{b}}$, calculus erit:

$$\begin{array}{r} \mathrm{L}.\,e = 0,0010801 \\ \mathrm{L.\,ſin.}\,\Phi = 9,9784607 \\ \hline 9,9795408 \\ 1,9413966 \\ \hline 8,0381442 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathrm{L}.\,\mu = 1,7644012 \\ \mathrm{L}.\,\sqrt{b} = 0,1769954 \\ \hline 1,9413966 \end{array}$$

hinc $\frac{e\,\text{ſin.}\,\Phi}{\mu\sqrt{b}} = 0,0109180$, ideoque poſito $dT = \frac{1}{15}$, fiet $dv = 0,0010918$, cuius concluſionis veritas computo reapſe inſtituto confirmari poteſt. Iam pro correctione $d\theta'$ ex dT deriuanda, ſequens fiat calculus:

$L.\,\text{coſ}.\,i = 9{,}68209$	$L.\,\text{ſin}.\,i = 9{,}94288$	$L.\,C = 4{,}60238$
$2\,L.\,\text{coſ}.\,\lambda = 9\;60236$	$L.\,\text{coſ}.\,\eta = 9{,}86985$	$L.\,\frac{e\,\text{ſin}.\,\Phi}{\mu\sqrt{b}} = 7\;03814$
$0{,}07973$	$L.\,B = 9{,}88961$	$L.\,P.\,III. = 1{,}64052$
$L.\,A = 0{,}09629$	$L.\,\frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = 1{,}69911$	
$L.\,\frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = 1{,}69911$	$L.\,P.\,II. = 1{,}40145$	
$L.\,\text{Part. I.} = 1{,}87513$		

Hinc fiet

$$d\theta' = -75'',0 + 25'',2 - 43'',7 = -93'',5.$$

Tum vero pro correctione $d\lambda'$ ſequens habetur calculus:

$L.\,\frac{\text{coſ}.\,i}{\text{coſ}.\,\lambda^2} = 0{,}07973$	$L.\,\text{ſin}.\,i = 9{,}94288$	$L.\,C' = 3{,}83563$
$L.\,A' = 9{,}44060$	$L.\,\text{coſ}.\,\eta = 9{,}86985$	$L.\,\frac{e\,\text{ſin}.\,\Phi}{\mu\sqrt{b}} = 7{,}03814$
$L.\,\frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = 1{,}69911$	$9{,}81273$	$L.\,P.\,III. = 0{,}87377$
$L.\,\text{Part. I.} = 1{,}21944$	$L.\,B' = 0{,}00901$	
	$L.\,\frac{\sqrt{b}}{\mu v^2} = 1{,}69911$	
	$L.\,\text{Part. II.} = 1{,}52085$	

ideoque erit

$$d\lambda' = +16'',6 + 33'',2 - 7'',5 = +42'',3.$$

§. 27. Vlterius ſi procedamus ad valores ipſorum $d\theta'$, $d\lambda'$ ex $d b$ et $d e$ deriuandos, praeſtabit vt primum haec differentialia $d\theta'$, $d\lambda'$ generatim ad $d\Phi$, dv reducamus, quod fiet multiplicando A, A' per $-\frac{\text{coſ}.\,i}{\text{coſ}.\,\lambda^2}$, et B, B' per ſin. i coſ. η, tumque ponendo

$$\frac{A\,\text{coſ}.\,i}{\text{coſ}.\,\lambda^2} - B\,\text{ſin}.\,i\,\text{coſ}.\,\eta = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{B'\,\text{coſ}.\,i}{\text{coſ}.\,\lambda^2} + B'\,\text{ſin}.\,i\,\text{coſ}.\,\eta.$$

Erit

Erit vero ob:

Log. A	$= 0,09629$	L. B	$= 9,88961$
Log. A′	$= 9,44060$	L. B′	$= 0,00901$
L. $\frac{coſ.\, i}{coſ.\, \lambda^2}$	$= 0,07973$	L. ſin. i coſ. η	$= 9,81273$
	$0,17602$		$9,70234$
	$9,52033$		$9,82174$

$\frac{A\, coſ.\, i}{coſ.\, \lambda^2} - B$ ſin. i coſ. $\eta = \alpha = 0,99586$, et

$\frac{A'\, coſ.\, i}{coſ.\, \lambda^2} + B'$ ſin. i coſ. $\eta = \beta = 0,99474$, vnde

Log. $\alpha = 9,99819$ et Log. $\beta = 9,99771$.

Iam quia eſt $b = 2,2593774$, ſupponamus in hoc valore, quantitate $0,005$ eſſe aberratum, eſſeque debere $b = 2,2643774$. Tum pro correctione $d\Phi$ ſequens habetur calculus, ob $T = 220,8085$ dies:

L. T	$= 2,3440157$	L μv^2	$= 7,4778809$ §. 26.
L. 3	$= 0,4771213$	L. $\surd b$	$= 0,1769954$
	$2,8211370$	L. 2	$= 0,3010300$
	$7,9559063$		$7,9553063$
	$4,8652307$		
L. $d\,b$	$= 7,69897$		
L. $d\,\phi$	$= 2,56420$,		

vnde $d\phi = -367'' = -6'.\,7''$. Pro variatione ipſius $d\,v$ computetur formula:

$$d\,v = \frac{v\,d\,b}{b} - \frac{3\,e\,T\,d\,b\,ſin.\,\Phi}{2\,\mu\,b\,\surd b};$$

 L. v

$L.v = 0,5139235$
$L.b = 0,3539907$
$\overline{}$
$0,1599328$
$L.db = 7,69897$
$\overline{}$
$L.P.I. = 9,85890$

$L.3 = 0,4771213$
$L.e = 0,0010811$
$L.T = 2,3440157$
$L.\text{ſin}.\Phi = 9,9784607$
$\overline{}$
$2,8006788$
$2,5964172$
$\overline{}$
$0,2042616$
$L.db = 7,69897$
$\overline{}$
$L.Part.II. = 7,90323$

$L.2 = 0,3010300$
$L.\mu = 1,7644012$
$L.b\sqrt{b} = 0,5309860$
$\overline{}$
$2,5964172$

hincque colligitur

$$dv = -0,0080026 + 0,0072261 = -0,0007765.$$

Iamque denuo pro correctionibus $d\theta'$, $d\lambda'$:

$L.\alpha = 9,99819$
$L.\alpha' = 9,99771$
$L.d\varphi = 2,56420$
$2,56239$
$2,56239$

$L.C = 4,60238$
$L.C' = 3,83563$
$L.dv = 6,89014$
$1,89252$
$0,72577$

$$d\theta' = -365'' - 31'' = -6'.36'', \text{ et}$$
$$d\lambda' = -365'' + 5'' = -6'.$$

§. 28. Denique quum ſit $e = 1,0024901$, ſi ibi ſtatuatur correctionem 0,001 eſſe admittendam, correctio anguli Φ ſequenti ratione computabitur:

L. b

$$
\begin{array}{rl}
L.\,b = & 0,3539907 \\
L.\,v = & 0,5139235 \\
\hline
L.\,\frac{b}{v} = & 9,8400672 \\
1 + \frac{b}{v} = & 1,6919380 \\
L.\,(1+\frac{b}{v}) = & 0,2283845 \\
L.\,\text{ſin.}\,\Phi = & 9,9784607 \\
\hline
& 0,2068452
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
L.\,3T = & 2,8211371 \\
L.\,e = & 0,0010801 \\
L.\,\sqrt{b} = & 0,1769954 \\
\hline
& 2,9992126 \\
L.\,\mu v^2 = & 2,7923060 \\
\hline
& 0,2069066 \\
\text{hinc}\ \frac{3eT\sqrt{b}}{\mu v^2} = & 1,6102992 \\
(1+\frac{b}{v})\,\text{ſin.}\,\Phi = & 1,6100715 \\
\hline
M = & 0,0002277
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
2L.\,v = & 1,0279048 \\
L.\,\mu = & 1,7644012 \\
\hline
& 2,7923060
\end{array}
$$

Porro eſt $e^2 - 1 = 0,0049865$, hinc

$$
\begin{array}{rl}
L.\,(e^2-1) = & 7,6977958 \\
& 4,6855749 \\
\hline
& 2,3833707
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
L.\,M = & 6,35736 \\
& 2,38337 \\
\hline
& 3,97399 \\
L.\,de = & 7,00000 \\
\hline
L.\,d\Phi = & 0,97399
\end{array}
$$

hincque $d\varphi = -9'', 4$. Tum vero pro correctione dv adhibeatur formula

$$dv = -\frac{v^2\,de\,\text{coſ.}\,\Phi}{b} + \frac{v^2 e\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{b},$$

cuius ſequenti ratione inſtituitur computus:

$$
\begin{array}{rl}
L.\,v^2 = & 1,02790 \\
L.\,e = & 0,00108 \\
L.\,\text{ſin.}\,\varphi = & 9,97846 \\
L.\,d\varphi = & 0,97399 \\
\hline
& 1,98143 \\
L.\,b = & 0,35399 \\
\hline
& 1,62744 \\
& 4,68557 \\
\hline
& 6,31301
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
L.\,v^2 = & 1,02790 \\
L.\,\text{coſ.}\,\varphi = & 9,48755 \\
\hline
& 0,51545 \\
L.\,b = & 0,35399 \\
\hline
& 0,16146 \\
L.\,e & 7,00000 \\
\hline
& 7,16146
\end{array}
$$

hinc-

hincque

$$d v = -\frac{v^2 d e \cos. \Phi}{b} + \frac{v^2 e d \Phi \sin. \Phi}{b} = 0,0014503 + 0,0002056$$

et $d v = + 0,0016559$. Nuncque demum pro $d\theta'$, $d\lambda'$

L. α = 9, 99819	L. C = 4, 60238
L. α' = 9, 99771	L. C' = 3, 83563
L. $d\Phi$ = 0, 97399	7, 21903
0, 97218	1, 82141
0, 95170	1, 05466

$$d\theta' = 9'', 4 + 66'', 3 = 75'', 7 \text{ et}$$
$$d\lambda' = - 9'', 4 + 11'', 3 = 1'', 9.$$

§. 29. Ex formulis pro $d\theta'$, $d\lambda'$ ex $d e$ deriuandis, vix quidquam in genere ſtatui poteſt, de obſeruationibus quae praeprimis ad excentricitatem determinandam conducunt, ſeu pro quibus correctio excentricitatis maximam habet vim ad locum Cometae Geocentricum immutandum. Si ad formulas pro $d\varphi$ et $d v$ per $d e$ determinandas confugere velimus, conſtat quidem pro caſu Perihelii et Aphelii eſſe, in Perihelio

$$d\varphi = -\frac{3 T e d e \sqrt{b}}{\mu v^2 (1-e^2)} = -\frac{3 T e d e}{\mu b \sqrt{b}} \cdot \frac{1+e}{1-e},$$

ob $v^2 = \frac{b^2}{(1+e)^2}$, in Aphelio autem

$$d\varphi = -\frac{3 T e d e \sqrt{b}}{\mu v^2 (1-e^2)} = -\frac{3 T e d e}{\mu b \sqrt{b}} \cdot \frac{1-e}{1+e},$$

vbi manifeſtum priorem correctionem multo eſſe maiorem poſteriori, idque eo magis, quo propius e accedit ad vnitatem. Pro v autem correctio $d v$ eſt in Perihelio $= -\frac{b d e}{(1+e)^2}$, et in Aphelio $d v = + \frac{b d e}{(1-e)^2}$, vbi poſterior correctio priori eſt multo maior et contrariae inſuper deno-

denominationis. Hocque iterum indicio conſtat generatim nihil ſtatui poſſe, de obſeruationibus, quae potiſſimum ab excentricitate immutari poſſunt. Interim tamen pro orbitis Planetarum, exiſtente valore ipſius e valde paruo, fiet $d\varphi$ maximum vbi ſin. $\varphi = 90$, quia in expreſſione

$$d\varphi = \frac{de}{1-e^2}\left(\text{ſin.}\,\varphi\,(2+e\,\text{coſ.}\,\varphi) - \frac{3Te\surd b}{\mu v^2}\right)$$

termini e coſ. φ ſin. $\varphi - \frac{3Te\surd b}{\mu v^2}$ reſpectu ipſius 2 ſin. φ valde parui haberi poſſunt. Tum quoque pro iſto caſu fiet $dv = 2\,e\,d\,e\,\frac{v^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{b(1-e)}$, ob coſ. $\varphi = 0$ et terminis quantitate e^2 affectis plane omiſſis. Contra vero in apſidibus, exiſtente ſin. $\varphi = 0$, fiet

$$d\varphi = -\frac{de}{(1-e^2)}\cdot\frac{Te\surd b}{\mu v^2} \text{ et } dv = \frac{v^2 de}{b} = \mp\frac{bde}{(1\pm e^2)}.$$

BRE-

BREVIS EXPOSITIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM IN VRBE TANBOW INSTITVTARVM.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Obſeruationes has pro determinanda poſitione vrbis Tanbow traditurus, primum referam de ſtatu quadrantis mei, in quem ſedulo inquiſiui per altitudines ſtellarum fixarum ad Auſtrum et Boream captas; atque reperi:

			Errorem	et Latitud.
die $\frac{13}{24}$ Dec. 1783.	Ex γ Cephei et η Pegaſi		3'. 0''	52°.43'.58''
	Ex eadem et α Androm.		3. 4	54
	Ex γ vrſ.maior. et	η Pegaſi	2.53$\frac{1}{2}$	51$\frac{1}{2}$
		α Andr.	2.57$\frac{1}{2}$	47$\frac{1}{2}$
		α Andr.	3. 3$\frac{1}{2}$	52$\frac{1}{2}$
die $\frac{16}{27}$ Dec.	Ex γ Cephei. et	δ —	3. 9	47
		β —	3. 5	51
		α	2.57$\frac{1}{2}$	46
	Ex γ vrſ.maior. et	δ Andr.	3. 3	41
		β	2.59	45
		α	3. 0	49
	Ex Polari et	δ Andr.	3. 5$\frac{1}{2}$	43$\frac{1}{2}$
		β	3. 1$\frac{1}{2}$	47$\frac{1}{2}$
		Med. -	3. 1;	52. 43. 48

Simli

Simili modo comparaui alias fixas ad Boream et Auſtrum obſeruatas, quas ſingulas exponere longum et ſuperfluum foret; atque ex 60 combinationibus inueni errorem medium — 3'. 3'', quo altitudines fixarum et ſolis hic recenſendas iam mulctatas ſiſto. Videamus nunc ipſas obſeruationes:

Altitudines ſtellarum fixarum meridianae ad auſtrum.

Dies obſ. St. Nou.	Nomina fixarum.	Alt. ab error. repurgat.	Refr.	Declin. appar.	Latitudo.
24 Dec.	η Pegaſi	66°. 22'. 32''	0'. 29''	29°. 6'. 4''	52°. 44'. 1''
1783.	α Androm.	65 10 45	0 31	27 54 7	43 53
27 Dec.	α Androm.	65 10 46	- -	- - -	43 52
	δ - -	66 57 37	0 28	29 40 50	43 41
	β - -	71 45 1	0 22	34 28 28	43 49
6 Febr.	α Ceti	40 31 30	1 17	3 13 57	43 44
1784.	Alcyone	60 42 28	0 37	23 25 37	43 46
	ζ Perſei	68 30 47	0 26	31 13 54	43 33
1 Mart.	γ Orion.	43 25 37	1 10	6 8 22	43 55
	ζ - -	35 13 37	1 34	2 4 12	43 45
	η Caſtor.	59 50 22	0 38	22 33 16	43 32
3 Mart	β Eridan.	31 55 9	1 46	5 22 44	43 53
	β Orion.	28 50 11	2 0	8 27 53	43 54
	β Taur.	65 41 21	0 30	28 24 40	43 49
	δ Orion.	36 49 17	1 29	0 28 25	43 47
	ε - -	35 56 23	1 31	1 21 17	43 51
	α - -	44 38 27	1 7	7 21 6	43 46
	μ Caſtor.	59 53 35	0 38	22 36 38	43 41
17 Mart	γ Polluc.	53 51 27	0 48	16 34 5½	43 26¼
	ε Caſtor.	62 36 45	0 34	25 19 48	43 37
	ζ Gemin.	58 9 35	0 42	20 52 20	43 27

 Dies

Dies obſ. St. Nou.	Nomina fixarum	Alt. ab error. repurgatae	Refr.	Declin. appar.	Latitudo.
17 Mai	η Virg.	37°.49′.28″	1′.26″	0°.31′.52″	52°.43′.50″
	β Corui	15 7 30	3 47	22 12 18	43 59
	γ Virgin.	37 1 47	1 28	0 15 57	43 44
		Fixae	ad	Boream.	
24 Dec.	γ Cephei	66 18 35	0 30	76 25 49,5	43 54½
	γ vrſ. maio	17 40 25	3 15	54 53 28	43 42
27	γ Cephei	66 18 34	0 30	76 25 49	43 53
	γ vrſ. maio	17 40 24	3 15	54 53 28	43 41
	Polaris	54 35 3	0 47	88 9 30	43 46
6 Febr.	γ vrſ. min.	35 21 0	1 33	72 35 44	43 43
3 Mart	δ Dracon.	30 2 12	1 54	67 16 33½	43 44½
17	— — —	30 2 15		67 16 32	43 49
19 Apr.	α Cephei	24 26 7	2 23	61 40 9,5	43 34½
	β Cephei	32 22 6	1 43	69 36 36,5	43 46½
17 Mai	Polar.	50 54 2	0 54	88 9 4	44 4
22	α Caſſiop.	18 7 50	3 10	55 21 2	43 38
	ε Caſſiop.	25 21 30	2 17	62 35 52	43 23
				Medium	52 43 45

Altitudines Solis meridianae.

E magno numero harum obſeruationum exhibeo eas tantum, quas menſibus Maio et Iunio cepi; in computu declinationis ſolis aſſumſi differentiam meridianorum inter Pariſios et Tanbow 2^h, 6.

Dies

Dies obſ. St. nov.		Altitudo limb. Boreal	Refr. — par.	½ Diam. ☉	Declinat. ☉	Eleuatio Poli.
1	Maii	52°.52′. 9″	0′.45″	15′.54″	15°.21′. 1″	52°.43′.31″
4		53 44 17	43	53	16 11 53	43 42
6		54 18 40	— —	—	16 45 32	43 28
14		56 22 6	39	51	18 49 13,5	43 37½
17		57 3 21	38,5	50,5	19 30 31	43 39
19		57 29 25	38	50	19 56 24	43 27
21		57 53 55	— —	—	20 20 55	43 28
22		58 5 29	37,5	49,5	20 32 40	43 38
24		58 28 19	36,5	—	20 55 8	43 25
26		58 49 4	36	49	21 16 7	43 28
27		58 58 46	— —	—	21 26 5	43 44
1	Iun.	59 43 0	34	48	22 10 14	43 36
3		59 57 51	— —	—	22 25 14	43 45
5		60 10 57	— —	—	22 38 39	44 0
6		60 17 34	— —	47,5	22 44 46,5	43 34
7		60 22 44	— —	—	22 50 30	44 7
8		60 28 31	35,5	—	22 55 49	43 39
11		60 41 57	33	47	23 9 26	43 49
12		60 45 21	— —	—	23 13 3	44 2
13		60 49 3	— —	—	23 16 21	43 38
15		60 53 55	— —	—	23 21 42	44 7
17		60 56 8	— —	—	23 25 24,5	43 56½
18		60 59 8	— —	—	23 26 39	44 1
20		61 0 10	— —	—	23 27 53	44 3
21		61 0 15	0. 33	15.47	23 27 52	43 55

Med. 52. 43. 44.

Latitudo igitur vrbis Tanbow tuto ſtatui poteſt 52°. 43¾′.

Obſer-

Obſeruationes pro longitudine eiusdem vrbis.

	Temp. ver. h.	′	″
$\frac{18}{29}$ Ianuar. 1784. Occultatio ε ♈ ad limbum Lunae obſcurum - -	9.	34.	8
obſeruatio inſtituta coelo vaporoſo, attamen bona videbatur; ſed circa determinationem temporis veri adeſt aliqua incertitudo, quia in motum penduli exacte inquirere ob dies nubilos non licuit.			
$\frac{10}{21}$ Apr. Celeno occultari videbatur ad limbum Lunae obſcurum - - - - -	8.	42.	52
Electra - - - -	8.	52.	44
obſeruationes hae factae prope horizontem, et ob nubem aliquantum dubiae, praeſertim poſterior.			
$\frac{1}{12}$ Maii Occultationem Iouis nubes obſeruare impedierunt; emerſionem vero bene obſeruaui ſequentem in modum:			
primum Iouis indicium ex parte limbi obſcuri Lunae - - - -	16.	12.	17½
planeta totus emerſus - - -	16.	13.	42½
Figura Iouis cernebatur elliptica, diameter ad ſenſum horizontalis maior erat verticali; ſatellites ob diluculum iam intenſum videre non potui.			

$\frac{12}{23}$ Maii

	Temp. ver.
	h. I. II
$\frac{12}{23}$ Maii Occultatio fixae in conſtellatione Cancri μ praecedentis ad limbum Lunae obſcurum - - -	11. 19. 12
obſeruatio peracta prope horizontem, et ob nubeculam tenuem ſubdubia.	
$\frac{3}{14}$ Iunii Immerſio 3ii ſatellitis Iouis	
Satelles vix videtur - - - -	13. 0. 41
Immerſio certa - - - -	13. 1. 9
coelo ſereno, Ioue bene terminato, faſciis mediocriter conſpicuis.	
$\frac{8}{19}$ Iun. Immerſio 1^{mi} ſatellitis	
Lumen ſatellitis valde imminutum -	12. 46. 55
Immerſio certa - - - -	12. 47. 10
Coelo admodum fauente faſciae ſatis bene diſcernebantur; obſeruatio bona.	
Ex hac vltima obſeruatione, collata cum momento ephemeridum, prodit differentia meridianorum inter Pariſios et Tanbow $2^h. 37'. 41''$,	
adeoque praeuia Longitudo a meridiano primo ſtatui interim poteſt. $59°. 25'$.	
Declinationem acus ex repetitis obſeruationibus inueni $5\frac{3}{4}$ gr. ad occaſum.	

DE SITV GEOGRAPHICO VRBIS KALVGAE, DEDVCTO EX OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS ANNO 1784 FACTIS.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Verificatione quadrantis bis inſtituta per altitudines ſtellarum fixarum ad Boream et Auſtrum captas, inveni errorem ſubtractiuum 3′. 6″, qui cum bene congruat cum errore in vrbe Tanbow reperto; hinc retinui priſtinum errorem, quo altitudines fixarum et Solis iam mulctatas ſiſto: in computu declinationis ſolis ſoppono differentiam meridianorum inter Pariſios et Kalugam 2¼ horarum. En ipſas obſeruationes et calculos:

Dies

Altitudines fixarum meridianae.

Dies obſ. St. nou.	Nomina fixarum.	Altitudines Fixarum.	refract.	Declinatio apparens.	Latitudo.
12 Iul.	α Lyrae	74°. 5′.56″	0′. 19″	38°.35′.45″	54°.30′. 8″
	β - -	68 38 26	25½	33 7 49	29 48½
	δ - -	72 9 0	22	36 38 27	29 49
	γ - -	67 54 56	27	32 24 40	30 11
13 Iul.	α Lyrae	74 5 58	0 19	38 35 45½	30 6½
	β - -	68 38 28	25½	33 7 49½	29 47
	δ - -	72 8 59	22	36 38 27	29 50
	γ - -	67 54 56	27	32 24 40½	30 11½
14 Iul.	α Ophiuch.	48 14 56	0 59½	12 14 17	30 20½
	β - -	40 11 37	1 18	4 40 43	30 24
	γ - -	38 19 42	1 24	2 48 35	30 17
	θ Hercul.	72 48 14	0 20½	37 17 41½	29 48
	α Lyrae	74 6 10	0 19	38 35 46	29 55
	β - -	68 38 28	0 25½	33 7 50	29 47½
	δ - -	72 9 2	0 22	36 38 27½	29 47½
	γ - -	67 54 56	0 27	32 24 40½	30 11½
22 Iul.	α Lyrae	74 6 9	0 19	38 35 48	29 58
	β - -	68 38 26	25½	33 7 51	29 50½
	δ - -	72 9 0	22	36 38 29½	29 51½
	γ - -	67 54 53	27	32 24 42½	30 16½
23 Iulii	α Lyrae	74 6 6	19	38 35 48	30 1
	β - -	68 38 25	25½	33 7 51	29 51½
	δ - -	72 9 4	22	36 38 29½	29 47½
	γ - -	67 55 0	27	32 24 42½	30 9½

Medium - - 54. 30. 0

Alti-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſ. St. noui	altit. limb. ſuperioris.	refr. – par.	½ Diam. ☉lis	declinatio ☉lis.	Eleuatio poli.
13 Iulii	57°.31′. 3″	0′.38″	15′.47″	21°.44′.54″	50°.30′.16″
14	57 22 12	—	- -	21 35 44	29 57
15	57 12 36	—	- -	21 26 11	30 0
18	56 42 9	0 39	- -	20 55 25	29 42
19	56 31 9	—	- -	20 44 26	29 43
23	55 43 49	40	15 47½	19 57 3½	29 42
29	54 22 47	42½	48	18 36 6½	29 50
30	54 8 16	43	48½	18 21 31	29 46½
31	53 53 11	—	- -	18 6 37	29 57½
1 Aug.	53 38 11	43½	49	17 51 26½	29 48
2	53 22 32	44	- -	17 35 57	29 58
3	53 6 51	45	- -	17 20 11	29 54
4	52 50 37	—	- -	17 4 7	30 4
5	52 34 24	46	- -	16 47 49	30 0
6	52 18 0	—	49½	16 31 13	29 48½
7	52 1 11	47	50	16 14 21	29 47
8	51 43 55	47½	- -	15 57 13½	29 56
9	51 26 11	48	- -	15 39 51	30 18
10	51 8 49	49	- -	15 22 13	30 3
13	50 14 26	50½	50½	14 27 51½	30 7
16	49 18 0	51½	51	13 31 25	30 7½
19	48 19 42	54	52	12 33 2	30 6
22	47 19 38	56	52½	11 32 52	30 2½
23	46 59 17	0. 56½	15 52½	11 12 26	29 58

medium ex 24 obſeru. 54 29 57

Ex his abunde patet latitudinem vrbis Kalugae tuto ſtatui poſſe 54°. 30′. Ob-

Obſeruationes pro Longitudine eiusdem vrbis.

	Temp. verum.
$\frac{1}{12}$ Iul. Immerſio 1^mi^ ſatellitis Iouis -	$12^h. 28'. 37^s.$ (*)
Obſeruatio haec ob nubeculas tenues in regione Iouis vagantes aliquantum dubia.	
$\frac{3}{14}$ Iul. Immerſio 2^di^ ſatellitis.	
Lumen ſatellitis valde imminutum -	12. 34. 54.
Immerſio certa - - - - -	12. 35. 24.
Coelo fauente, 3. faſciae ſatis diſcernebantur, figura Iouis bene terminata; altitudo planetae poſt obſeruationem erat 19°. 7'.	
$\frac{6}{17}$ Iul. Immerſio 4^ti^ ſatellitis - -	12. 23. 0.
Coelo aliquantum vaporoſo faſciae non diſtincte apparebant.	
$\frac{16}{27}$ Iul. Immerſio 3^ii^ ſatellitis.	
Satelles vix perceptibilis - - -	12. 36. 10.
Immerſio certa - - - - - -	12. 36. 20.
Coelo ſereno et pacato faſciae ſatis viſibiles, obſeruatio bona: altitudo planetae erat 23°.	
$\frac{17}{28}$ Iul. Immerſio 1^mi^ ſatellitis.	
Satelles immergi videbatur - -	10. 44. 20.
Immerſio totalis - - -	10. 44. 35.
Aëre non nihil vaporoſo faſciae mediocriter apparebant; altitudo Iouis erat 14°.	

		Temp. verum.
24 Iul. / 4 Aug.	Immerſio 1^{mi} ſatellitis videbatur -	12. 39. 40.
	Obſeruatio haec ob nubeculas per totum coelum diſperſas ſubdubia.	
27 Iul. / 7 Aug.	Occultatio ε Arietis ad limbum Lunae lucidum. - - - - - -	12. 34. 14.
	Emerſio eiusdem ad limbum obſcurum.	13. 21. 4.
	Coelo fauente, obſeruatio bona.	
28 Iul. / 8 Aug.	Immerſio 2^{di} ſatellitis - -	9. 43. 50. (*)
	Coelo vaporoſo faſciae dubie videbantur.	
31 Iul. / 11 Aug.	Immerſio 1^{mi} ſatellitis.	
	Lumen ſatellitis valde imminuitur -	14. 34. 0.
	occultari videbatur - - -	14. 34. 40.
	Immerſio totalis - - - -	14. 35. 3.
	Coelo ſereno, altitudo planetae $21^{\circ}. 5'$.	
4 / 15 Aug.	Immerſio 2^{di} ſatellitis	
	Satelles vix perceptibilis - -	12. 21. 34.
	Immerſio totalis - - - - -	12. 22. 31.
	Satelles lumine valde imminutus prope diſcum Iouis occultabatur, coelo quidem ſereno ſed vaporoſo, faſciae minus diſtincte repreſentabantur; altitudo planetae, 10 minutis elapſis, erat $24^{\circ}. 15\frac{1}{2}'$.	

Facta comparatione obſeruationum primi et ſecundi ſatellitum cum momentis ephemeridum, (exceptis duabus aſteriſco notatis), prodit differentia meridianorum inter Pariſios et Kalugam $2^{h}. 14'. 34''$.

Declinationem acus magneticae ex repetitis obſeruationibus inueni $7\frac{3}{4}^{\circ}$ occidentem verſus.

Ani-

Animaduerſio in Longitudinem Kalugae.

Die $\frac{15}{27}$ Iulii Imm. III. Sat.	$12^h. 12'. 53''$.	Petrop.
	12. 36. 20.	Kalugae.
Differ. merid.	0. 23. 27.	
Longit. Petr. a Pariſiis	1. 51. 58.	
Longitudo Kalugae	2. 15. 25.	
Die $\frac{31}{11}$ Iulii Aug. Imm. I. Sat.	14. 12. 2.	Petrop.
	14. 35. 3.	Kalug.
Diff. merid.	0. 23. 1.	
	1. 51. 58.	
Longit. Kalugae	2. 14. 59.	

Cum determinatio poſterior praeferenda ſit priori, Longitudo Kalugae a Meridiano Pariſino computata ſtatui poterit rotunde $2^h. 15'. 0''$: donec aliae obſeruationes cum correſpondentibus collatae diuerſum quid ſuadere videantur.

Rumovsky.

Comparatio quarundam obſeruationum circa Immerſiones I. Satellitis Iouis, Petropoli et Kalugae factarum pro determinanda Longitudine huius vrbis.

Die 12 Iulii St. Nov. Kalugae obſeruata eſt Immerſio I.

	$12^h. 28'. 37''$	Temp. ver.
eadem Petropoli obſeruata	11. 6. 56	
Differentia meridianorum	21. 41.	

 Quum

Quum obſeruatio Kalugae facta dubia ſit, igitur huic concluſioni non magnopere fides adhiberi poteſt.

Die 28. Iulii Immerſio I. Kalugae	10^h.	$44'$.	$35''$	Temp. vero
Petropoli	10.	21.	47,	
Differentia meridianorum		22.	48.	
Die 11. Aug, Immerſio I. Kalugae	14.	35.	3.	
Petropoli	14.	11.	56.	
Differentia meridianorum		23.	7.	

Hinc medio capto inter binas vltimas concluſiones, fit differentia Meridianorum $22'$. $58''$; ſuppoſita igitur Longitudine Petropolis a Lutetiis Pariſiorum 1^h. $51'$. $58''$, erit Longitudo Kalugae 2^h. $14'$. $56''$ in tempore, ſeu ſi placet numero rotundo 2^h. $15'$. $0''$. Vnde Longitudinem vrbis Kalugae a meridiano primo ſine ſenſibili errore ſtatuere licebit $53°$. $45'$.

Lexell.

SVP-

SVPPLEMENTVM IN DISSERTATIONEM DE MOTV COMETARVM EX TRIBVS OBSERVATIONIBVS DETERMINANDO.

Auctore
NICOLAO FVSS.

§. 1.

In Diſſertatione *De motu cometarum ex tribus obſeruationibus determinando*, quam anno proxime praeterlapſo conuentui academico praelegi, quaeque Actorum Tomo IV. Parti 2ae. inſerta fuit, quaedam manca, nec ſatis concinne alia quaedam expoſita mihi hoc argumentum denuo perpendenti viſa ſunt.

Primo enim determinatio areae a cometa deſcriptae ex duabus cometae a Sole diſtantiis et angulo percurſo petita, etiam omnibus calculi compendiis artificiisque adhibitis, valde operoſa euaſerat. Tum vero temporis determinatio, ex valore areae deſcriptae petita, relationi innitebatur in Theoria quidem motus planetarum ſatis notae, cuius autem demonſtratio ſuccincta ibi merito deſiderari poteſt. Denique quo argumenti ſuſcepti tractatio magis completa fieret, etiam

 conſi-

conſiderari debuiſſet motus cometae, cuius orbita parabolica in ipſum planum eclipticae incidit. Huic triplici defecto ſequentibus problematibus heic occurrere mecum conſtitui.

Problema I.

Tab. V. Fig. 2. §. 2. *Datis duabus cometae a ſole diſtantiis* $FS = f$ *et* $GS = g$, *vna cum angulo intercepto* $FSG = \theta$, *inuenire aream ſectoris parabolici* $FSG = \Delta$.

Solutio.

Sit Π vertex parabolae, ſiue perihelium cometae, poſitaque eius diſtantia a Sole $\Pi S = p$, erit parameter huius parabolae $= 4p$; vnde ſi ex puncto F ad axem ΠB demittatur perpendiculum FP, poſita abſciſſa $\Pi P = x$ et applicata $PF = y$ erit ex natura parabolae $yy = 4px$ et $y = PF = 2\sqrt{px}$. Hinc autem fiet area

$$\Pi PF = \int y\,dx = 2\sqrt{p}\int dx\sqrt{x} = \tfrac{4}{3}x\sqrt{px}.$$

Cum autem ſit

$$FS = \sqrt{(PS^2 + PF^2)} = \sqrt{((x-p)^2 + 4px)},$$

erit $FS = f = x + p$, ideoque $x = f - p$, vnde fit area

$$\Pi PF = \tfrac{4}{3}(f-p)\sqrt{(fp-pp)}.$$

Hinc ſubtrahi debet area trianguli $SPF = \tfrac{1}{2}PF.PS$, quae eſt

$$SPF = (x-p)\sqrt{px} = (x-p)\sqrt{(pf-pp)},$$

qua ſublata remanebit area ΠSF, ſcilicet

$$\Pi SF = \tfrac{1}{3}(f+2p)\sqrt{(pf-pp)}.$$

Quodſi iam punctum alterum G ſimili modo tractetur, demiſſa applicata GQ et factis reliquis operationibus vt

vt ſupra, inuenitur area

$$\Pi S G = \tfrac{1}{3}(g + 2p)\sqrt{(pg - pp)},$$

a qua ſi ſubtrahatur

$$\Pi S F = \tfrac{1}{3}(f + 2p)\sqrt{(pf - pp)},$$

habebitur area ſectoris parabolici quaeſita

$$FSG = \Delta = \tfrac{1}{3}(g + 2p)\sqrt{(pg - pp)} - \tfrac{1}{3}(f + 2p)\sqrt{(pf - pp)}.$$

Cum autem diſtantia perihelii $\Pi S = p$ non detur, neceſſe eſt vt eius loco angulus cognitus $FSG = \theta$ introducatur, quod ſequenti modo commodiſſime praeſtabitur. Ponatur angulus $FSB = \Phi$, ita vt $GSB = \Phi - \theta$, eritque

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{PF}{SF} = \frac{2\sqrt{(pf - pp)}}{f},$$

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{f - 2p}{f}$$

$$\text{ſin.}\,(\Phi - \theta) = \frac{QG}{SG} = \frac{2\sqrt{(pg - pp)}}{g},$$

$$\text{coſ.}\,(\Phi - \theta) = \frac{g - 2p}{g},$$

vnde ob

$$\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\Phi - \theta) - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\Phi - \theta) = \text{ſin.}\,\theta \text{ erit}$$

$$\text{ſin.}\,\theta = \frac{2(g - 2p)\sqrt{(pf - pp)}}{fg} - \frac{2(f - 2p)\sqrt{(pg - pp)}}{fg}.$$

Tum vero etiam noſſe iuuabit ſin. $\tfrac{1}{2}\theta$, qui ob

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{1 - \text{coſ.}\,\Phi}{2}},$$

conſequenter:

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{p}{f}}, \qquad \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi - \theta) = \sqrt{\frac{p}{g}}$$

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{f - p}{f}}, \quad \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(\Phi - \theta) = \sqrt{\frac{g - p}{g}}$$

hoc modo exprimitur:

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{(pg - pp)} - \sqrt{(pf - pp)}}{\sqrt{fg}}.$$

Quod

Quodſi nunc a triplo areae F S G, quod eſt

$$3\Delta = (g+2p)\sqrt{(pg-pp)} - (f+2p)\sqrt{(pf-pp)},$$

auferatur

$$\tfrac{1}{2}fg\,\text{ſin.}\,\theta = (g-2p)\sqrt{(pf-pp)} - (f-2p)\sqrt{(pg-pp)},$$

remanebit

$$3\Delta - \tfrac{1}{2}fg\,\text{ſin.}\,\theta = (f+g)(\sqrt{pg-pp} - \sqrt{pf-pp}).$$

Eſt vero

$$\sqrt{(pg-pp)} - \sqrt{(pf-pp)} = \sqrt{fg}\,.\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\theta,$$

ideoque

$$3\Delta - \tfrac{1}{2}fg\,\text{ſin.}\,\theta = \sqrt{fg}\,.\,(f+g)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\theta,$$

conſequenter area

$$FSG = \Delta = \tfrac{1}{3}(f+g)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{fg} + \tfrac{1}{6}fg\,\text{ſin.}\,\theta.$$

quae expreſſio cum illa in diſſertatione memorata per multas ambages inuenta prorſus congruit.

Corollarium 1.

§. 3. Si fuerit $g = 2f$ et angulus $\theta = 90°$, hic caſus eſt quo punctum F reperitur in ipſo perihelio, ſeu vertice parabolae Π, recta autem SG eſt applicata in foco parabolae. Hoc igitur caſu erit area $\Delta = \frac{4}{3}ff$, vti requiritur.

Corollarium 2.

Tab. V. Fig. 3. §. 4 Caſus etiam memoratu dignus prodit, quando angulus $FSG = \theta$ ſtatuitur duobus rectis aequalis. Hoc enim caſu ambo radii vectores SG et SF in directum iacebunt et Δ denotabit aream ſegmenti parabolici FΠGS recta per focum S ducta abſciſſi; iſta autem area erit

$$\Delta = \tfrac{1}{3}(f+g)\sqrt{fg}.$$

§. 5.

Corollarium 3.

§. 5. Quodſi ex datis noſtris elementis f, g et θ inſuper quaeratur ſemiparameter parabolae, ad quam ſector propoſitus F S G pertineat, id commode praeſtabi tur hoc modo. Ex valoribus ſupra pro ſinubus et coſinubus angulorum $\frac{1}{2}\Phi$ et $\frac{1}{2}(\Phi - \theta)$ inuentis quaeratur

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(\Phi - \theta) + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(\Phi - \theta),$$

erit

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{((f-p)(g-p))} + p}{\sqrt{fg}},$$

vnde deducitur

$$\sqrt{fg}\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta - p = \sqrt{(f-p)(g-p)},$$

quae aequatio dat quartam partem parametri, ſiue diſtantiam perihelii

$$p = \frac{fg\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta^2}{f + g - 2\sqrt{fg}\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta}.$$

Corollarium 4.

§. 6. Inuento hoc valore etiam ipſa poſitio axis parabolae Π B reſpectu ſectoris dati F S G immediate ex cognitis f, g, θ definiri poterit. Erit enim $\text{ſin.}\frac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{p}{f}}$, ideoque

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\frac{g}{f + g - 2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{fg}}}.$$

Problema II.

§. 7. *Definire veram relationem inter aream cuiusque orbitae a planeta ſiue a cometa circa ſolem deſcriptae et ipſum tempus quo haec area deſcribitur.*

 Solu-

Solutio.

Primo conſtitui debet certa menſura, qua tempora metiri voluerimus. Vtamur igitur hunc in finem motu medio ſolis et menſuremus tempus quodcunque per angulum, quo ſol motu medio interea fuerit promotus. Hunc autem angulum non per gradus et minuta, ſed in partibus radii exprimamus, ita vt totum tempus periodicum ſolis, ſeu ſpatium interuallo anni percurſum exprimatur per 2π.

Denotet porro c diſtantiam mediam ſolis a terra, ita vt area totius circuli a ſole deſcripti ſit $= \pi c c$. Aſſumimus enim hic terram circa ſolem circulum deſcribi, cuius radius $= c$, quandoquidem in temporibus dimetiendis motum tanquam medium ſpectamus.

Tab. V Fig. 4. Conſideremus iam orbitam planetae cuiusque primarii ellipticam A D F G B, cuius ſemiaxis transuerſus ſeu maior $CA = CB = a$ et excentricitas $= \varepsilon$, ita vt ſit diſtantia ſolis a centro ellipſis $CS = \varepsilon a$, eritque ſemiaxis conjugatus $CD = a\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon)}$ et ſemiparameter, quem vocemus $= b = 2p = a(1 - \varepsilon\varepsilon)$.

Conſideremus porro in hac orbita elliptica ſectorem quemcunque F S G, cuius area $= \Delta$, ſitque tempus, quo iſte ſector a planeta conficitur, modo ſupra indicato exprimendum $= \Theta$. Iam quia nouimus tempora arcis eſſe proportionalia, erit $\Theta = m\Delta$, exiſtente m quantitate certa conſtante, et nunc res eo redit, vt haec quantitas m pro ratione menſurae temporum rite aſſignetur.

Iam

Iam conſtat quadrata temporum periodicorum circa ſolem abſolutorum tenere inter ſe rationem triplicatam axium transuerſorum ſiue diſtantiarum mediarum a ſole; vnde tempus periodicum noſtri planetae ſe habebit ad tempus periodicum terrae, quod vidimus eſſe 2π, vt $a\sqrt{a}$ ad $c\sqrt{c}$, ita vt hoc tempus periodicum ſit $\frac{2\pi a \sqrt{a}}{c\sqrt{c}}$.

Extendatur nunc ſector F S G per totam ellipſin, eritque

$$\Delta = \pi \,.\, CA \,.\, CD = \pi a a \sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)},$$

et ob $\Theta = \frac{2\pi a \sqrt{a}}{c\sqrt{c}}$ erit quantitas illa

$$m = \frac{\Theta}{\Delta} = \frac{2}{c\sqrt{a.c}\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}},$$

ſiue $m = \frac{2}{c\sqrt{bc}}$, ob $b = a(1-\varepsilon\varepsilon)$. Relatio ergo inter aream quamcunque Δ et tempus illi reſpondens Θ ita definitur, vt ſit $\Theta = \frac{2\Delta}{c\sqrt{bc}}$.

Corollarium 1.

§. 8. Pro Cometa igitur noſtro in orbita parabolica, cuius ſemiparameter

$$2p = \frac{2fg\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\theta^2}{f+g-2\sqrt{fg}\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\theta},$$

delato, tempus quo aream ſectoris F S G percurrit erit

$$\Theta = \frac{\Delta\sqrt{2}}{c\sqrt{cp}} = \frac{\Delta\sqrt{2}}{c\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{(f+g-2\sqrt{fg}\,.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\theta)}}{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{fg}},$$

hoc eſt

$$\Theta = \frac{\sqrt{2}}{3c\sqrt{c}}(f+g+\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\theta\,.\sqrt{fg})\sqrt{(f+g-2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\theta\,.\sqrt{fg})}.$$

Corollarium 2.

§. 9. Ponatur hic iterum angulus $FSG = \theta = 180°$, eritque $\Theta = \frac{\sqrt{2}}{3c\sqrt{c}}(f+g)^{\frac{3}{2}}$, quae expreſſio ideo potiſſimum notatu digna eſt, quod ex ea diſtantia nodorum F G tam ſimpliciter per ſolum tempus, quo cometa ex F in G peruenerit, exprimatur. Eſt enim

$$FG = (f+g) = c\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\Theta\Theta},$$

ita vt eius ratio ad diſtantiam mediam terrae a ſole detur.

Problema III.

Tab V. Fig. 5. §. 10. *Cognita tam poſitione axis orbitae* Π V, *quam diſtantia perihelii a Sole* Π S, *ex qualibet cometae obſeruatione eius locum in ſua orbita determinare.*

Solutio.

Sit pro tempore obſeruationis terra in T et cometa in Z, et quia cometa obſeruatur in directione T Z, dabitur diſtantia Terrae a ſole $ST = a$; diſtantia perihelii $\Pi S = p$, angulus $\Pi ST = \alpha$ et angulus $STZ = \zeta$. Ex natura autem parabolae, poſito eius ſemiparametro $2.\Pi S = 2p = b$ et anomalia ſiue angulo $\Pi SZ = \Phi$, erit diſtantia cometae a Sole $SZ = \frac{b}{1+\cos.\Phi}$.

Nunc ex triangulo S T Z habebimus:

$ST : \sin. SZT = SZ : \sin. STZ.$

Cum igitur ſit $\Pi ST = \alpha$ et $\Pi SZ = \Phi$, erit $ZST = \alpha - \Phi$ ideoque

SZT

$$SZT = 180° - ZST - ZTS = 180° + \Phi - \alpha - \zeta.$$

vnde ſi ponatur $\alpha + \zeta = \beta$, ita vt angulus externus $TZY = \beta - \Phi$, noſtra analogia erit

$$a : \text{ſin.}(\beta - \Phi) = \frac{b}{1 + \text{coſ.}\Phi} : \text{ſin.}\zeta,$$

quae praebet

$$a\,\text{ſin.}\zeta = \frac{b\,\text{ſin.}(\beta - \Phi)}{1 + \text{coſ.}\Phi},$$

ex qua aequatione angulum Φ definiri oportet.

Hunc in finem repraeſentetur aequatio modo inventa ſub hac forma, euoluendo ſin. $(\beta - \Phi)$:

$$a\,\text{ſin.}\zeta = \text{coſ.}\Phi(b\,\text{ſin.}\beta - a\,\text{ſin.}\zeta) - \text{ſin.}\Phi . b\,\text{coſ.}\beta;$$

et nunc quaeratur angulus θ, ita comparatus vt ſit

$$\text{tang.}\theta = \frac{b\,\text{coſ.}\beta}{b\,\text{ſin.}\beta - a\,\text{ſin.}\zeta},$$

quo inuento habebitur

$$b\,\text{ſin.}\beta - a\,\text{ſin.}\zeta = \frac{b\,\text{coſ.}\beta}{\text{tang.}\theta}.$$

Quodſi iam hic valor in noſtra aequatione ſubſtituatur, ea hanc induet formam:

$$a\,\text{ſin.}\zeta = \frac{b\,\text{coſ.}\beta\,\text{coſ.}\Phi}{\text{tang.}\theta} - b\,\text{coſ.}\beta\,\text{ſin.}\Phi,$$

ſiue erit

$$a\,\text{ſin.}\zeta = \frac{b\,\text{coſ.}\beta\,\text{coſ.}(\theta + \Phi)}{\text{ſin.}\theta}.$$

Cum autem ex aſſumto valore

$$\text{tang.}\theta = \frac{b\,\text{coſ.}\beta}{b\,\text{ſin.}\beta - a\,\text{ſin.}\zeta}$$

habeamus:

$$a\,\text{ſin.}\zeta = \frac{b\,\text{ſin.}\beta\,\text{tang.}\theta - b\,\text{coſ.}\beta}{\text{tang.}\theta} = -\frac{b\,\text{coſ.}(\beta + \theta)}{\text{ſin.}\theta},$$

his valoribus inter ſe comparatis nanciſcimur hanc aequalitatem:

$$\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,(\theta + \Phi) = -\,\text{coſ.}\,(\beta + \theta),$$

ex qua anomaliam quaeſitam Φ facillime ex ſolis angulis β et θ datis determinatur, cum ſit

$$\text{coſ.}\,(\theta + \Phi) = -\,\frac{\text{coſ.}\,(\beta + \theta)}{\text{coſ.}\,\beta}.$$

Scholion 1.

§. 11. Inuento hoc angulo Φ ſtatim habebitur diſtantia cometae a Sole $SZ = \frac{b}{1 + \text{coſ.}\,\Phi}$, quae ſi breuitatis gratia dicatur $SZ = f$, erit ſecundum ſolutionem primi problematis area ſectoris

$$\Pi SZ = \tfrac{1}{3}(f + b)\sqrt{(\tfrac{1}{2}fb - \tfrac{1}{4}bb)}.$$

Quod ſi iam ſtatuamus tempus, quo cometa a perihelio Π vsque in punctum Z peruenit, quodque per motum medium Solis experimendum eſt, $= \Theta$, habebitur haec aequatio:

$$\tfrac{1}{4}(f + b)\sqrt{(\tfrac{1}{2}fb - \tfrac{1}{4}bb)} = \tfrac{1}{2}\,\Theta\,c\sqrt{bc},$$

vbi c denotat diſtantiam mediam terrae a ſole, hinc per $\sqrt{b}$ diuidendo erit

$$\tfrac{1}{3}(f + b)\sqrt{(\tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{4}b)} = \tfrac{1}{2}\,\Theta\,c\sqrt{c},$$

vnde fit tempus

$$\Theta = \frac{(f + b)\sqrt{(2f - b)}}{3c\sqrt{c}}.$$

Scholion 2.

§. 12. Quodſi hoc modo tres obſeruationes fuerint computatae, quibus cometa fuerit in punctis F, G, H, ex areis ΠSF, ΠSG, ΠSH reperientur tempora Θ, Θ', Θ'', quibus cometa ex perihelio Π peruenerit in F, G, H. Et quia interualla temporum inter obſeruationes dantur,

dantur, ſcilicet tempus quo interuallum F G abſoluitur $= t$ et tempus ab F ad H $= t'$, habebuntur iſtae binae aequationes:

$$\Theta' - \Theta = t; \ \Theta'' - \Theta = t',$$

quae ſi cum veritate conueniant, id indicio erit tam poſitionem axis orbitae quam diſtantiam perihelii rite eſſe aſſignatam. Sin autem hae determinationes cum veritate non conueniant, inſuper binae hypotheſes fingantur neceſſe eſt, quarum altera axis poſitio, altera vero diſtantia perihelii a ſole parumper immutatur. Tum enim, ſi pro tribus hypotheſibus errores in temporibus reperti probe perpendantur, facile definietur quantum tam poſitio axis quam perihelii diſtantia immutari debeant, vt cum veritate penitus conueniant. Tota igitur inueſtigatio eo reducitur, vt ex aliquibus obſeruationibus ſaltem vero proxime tam poſitio axis quam diſtantia perihelii cognoſcantur.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQVES FAITES PRÈS DE GENEVE

par

J. A. MALLET.

Membre de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Les obſervations aſtronomiques que j'ai l'honneur de préſenter ici à l'Académie, ont été faites à Avully, près de Genève, maiſon de campagne où j'ai établi depuis peu mon obſervatoire. La ſituation de ce lieu que nous avons déterminée Mr. *Marc Pictet* & moi par des obſervations trigonométriques, eſt de 1720 Toiſes de France plus méridionale & 5970 Toiſes plus occidentale que l'obſervatoire de Genève. En ſuppoſant la Longitude de celui-cy de 15': 0" de temps à l'orient de Paris, comme je l'avois déduite cy-devant d'un aſſez grand nombre d'éclipſes de ſatellites de Jupiter comparées avec les correſpondantes obſervées à Paris par Mr. *Meſſier*, & ſa Latitude de 46°. 12'. 00": je trouve la Longitude de l'obſervatoire d'Avully de 14' : 24" de tems à l'orient de Paris, & la hauteur du Pole de 46°. 10'. 10"; cette Hauteur du Pôle ainſi déduite de la diſtance de Genève s'accorde parfaitement avec celle que j'ai trouvée immédiatement par des obſervations Aſtronomiques.

1°. Oc-

1°. Occultations d'étoiles par la Lune.

Le 10 Juillet 1783. J'obſervai l'Immerſion de l'étoile π du ſcorpion, ſous le disque obſcur de la Lune à - - - - - - 8^h. 36'. 58'',4 & l'Emerſion de deſſous la partie éclairée à - 9. 19. 4,2 } Temps vrai

Je crois ces deux obſervations très-bonnes.

Le 9 Septembre 1783. Pendant que la Lune étoit totalement éclipſée, j'obſervai l'occultation d'une petite étoile du verſeau à - - 12^h. 9'. 37'',7 T. vrai

Le 16 Novembre 1784. Ayant dirigé ma lunette ſur la Lune, je vis une petite étoile qui étoit dans le cas d'être éclipſée, & en effet j'obſervai enſuite ſon Immerſion ſous la partie obſcure à - 5^h. 53'. 18'',3 T. vrai

Cette obſervation eſt excellente, parceque la partie éclairée étant peu conſidérable, je pouvois faire enſorte qu'elle ne fût point du tout dans le champ de la lunette. Je n'ai pas trouvé cette étoile dans les Catalogues, elle doit être peu éloignée de ψ du Sagittaire.

Ces trois obſervations ont été faites avec une lunette achromatique à triple objectif de 3½ pieds, & un oculaire qui la fait groſſir 70 fois.

2°. Eclipſes des ſatellites de Jupiter.

Année	Mais & Jours	Tems vrai à Avully.	Les obſervations ſuivantes ont été faites avec la même lunette de 3½ pieds; l'oculaire N°. 1 la fait groſſir environ 125 fois, & le N°. 2,70 fois.
1783	Juillet 8	12ʰ.38′.45″.	Immerſ. du 1r. ſat (ocul. N°. 1). très-bonne obſervation.
	Aouſt. 9	11 19 58	Emerſ. du 1r. (ocul. N°. 1.). très-bonne, temps ſerein.
	Septbre 9	8 12 25	Emerſ. du 2d. (ocul. N°. 1). aſſez bonne, malgre le temps vaporeux & le clair de la lune.
	10	10 50 56	Emerſ. du 2d. (N°. 1). obſervation médiocre, le disque mal terminé, vapeurs.
	17	10 15 46	Emerſ. du 1r. (N°. 1). aſſez bonne, quoiqu'il y eût des vapeurs, & le disque mal terminé.
	Octobre 3	8 41 15	Emerſ du 1r (N°.1) bonne obſerv., on voyoit bien les bandes.
1784.	Juillet. 14	10 34 53	Immerſ. du 2d. (N°. 2) par Mr. Marc Pictet, aſſez bonne, quoique Jupiter ſoit bas.
	17	10 23 57	Emerſ. du 4e. (N°. 2) bonne obſ., quoique Jupiter ſoit peu élevé.
	Aouſt. 11	12 34 40	Immerſ du 1r. (N°.2) très-bonne, on voyoit diſtinctement trois bandes.
	15	10 22 43	Immerſ. du 2d. (N°. 2) temps très-ſerein, obſerv. aſſez bonne, quoique le ſatell. ſoit très près de Jupiter.
	Septbre 9	10 24 8	Emerſ. du 2d. (N°. 2) le ſatell. très près de Jupiter, l'obſervation eſt aſſez bonne.
	12	11 34 34	Emerſ. du 1r. (N°. 2) très-bonne.
	22	6 55 48	Immerſ. du 4e. (N°. 2) c'eſt l'heure où j'ai ceſſé de le voir, car il entre ſi lentement dans l'ombre que l'inſtant de la diſparition eſt douteux.
	—	11 23 20	Emerſ. du 4e. douteuſe, à cauſe du brouillard, J'ai revu le ſatellite au moment marqué dans un éclairci, ſa lumière étoit aſſez foible pour que je croye que la véritable Emerſion a eu lieu bien peu de temps avant mon obſervation.
	Octobre 5	11 57 4	Emerſ. du 1r. (N°. 2) très-bonne obſervation.
	Novem. 12	10 1 58	Emerſ. du 2d. (N°. 2) paſſable, le disque étoit un peu tremblant, il faiſoit un vent violent.
	22	6 59 59	Emerſ. du 1r. (N°. 2) très-bonne, temps très-ſerein.
	Decem. 15	6 33 31	Emerſ. du 4e. (N°. 2 obſervation un peu douteuſe, à cauſe du brouillard qui ne me permettoit de voir les bandes que de temps en temps.

3°. E-

3°. Eclipſe de lune le 9 Septembre 1783.

J'ai fait cette obſervation avec la même lunette & l'oculaire N°. 2. Le ciel étoit aſſez nuageux, c'eſt pourquoi je n'ai pû obſerver la ſortie que d'un petit nombre de taches.

Tems vrai à Avully.		Tems vrai	
10^h. 5'.53"	Je crois que la pénombre a déja commencé.		La Lune éclipſée paroiſſoit à l'oeil un peu rougeatre, ce qu'on ne voyoit pas ſi bien avec la lunette: On a toujours pû voir ſon disque & même ſes taches pendant l'obſcurité.
— 13 53	Grimaldi eſt tout entré, douteuſe.		
— 17 7	Ariſtarque entre dans l'ombre.		
— 22 23	Mare humorum commence à entrer à peu près.		
— 26 53	Copernic entre, & Mare humorum eſt toute dedans.		
— 30 18	Bullialdus touche l'ombre.	12^h.48'. 7"	Il ſemble que l'Emerſion commence, mais les nuages & vapeurs rendent cela douteux.
— 33 53	Platon commence à entrer.		
— 36 8	Pitatus entre.		
— 36 53	Pitatus eſt tout dedans.		
— 39 53	Mare ſerenitatis commence.	13 11 25	Tycho & Plato commencent à ſortir de l'ombre.
— 40 23	Manilius entre.		
— 40 38	Tycho entre.	— 11 55	Plato eſt tout ſorti.
— 41 33	Manilius tout dedans.	— 25 11	Menelaus ſort.
— 41 53	Tycho tout dedans.	— 29 11	Plinius, un peu douteux.
— 42 38	Eudoxe & Ariſtote ſont dedans.	— 30 26	Mare ſerenitatis à-peu-près toute dehors.
— 47 54	Plinius touche l'ombre		
— 49 9	Mare ſerenitatis toute dedans.	— 37 56	Mare criſium commence à ſortir.
— 53 4	Promontor. acutum entre.		
— 57 24	Proclus touche l'ombre.	— 43 56	Mare criſium toute dehors
— 58 54	Mare criſium entre.	13 48 —	a-peu-près la fin de l'éclipſe, très-douteuſe.
11^h. 3. 54	Mare criſium toute dedans.		
	Les nuages m'ont empéché d'obſerver l'Immerſion totale avec exactitude, je crois qu'elle a eu lieu très-près de 11^h. 8. 54.		

4°. Op-

4°. Oppoſition de Saturne en 1784.

J'ai comparé cette Planète le 14, 15 & 16 Juillet à cinq étoiles ſituées près de ſon parallèle, ſavoir à δ du ſcorpion, à 2 ξ, ο, π du ſagittaire, & à une autre petite étoile ſans nom du ſagittaire; les paſſages au méridien ont été obſervés aux trois fils d'une lunette méridienne achromatique de 4 pieds, & les hauteurs à un quart-de-cercle anglois de $2\frac{1}{2}$ pieds; Mr. *Pictet* prenoit les hauteurs tandis que j'obſervois les paſſages.

En déduiſant la déclinaiſon de Saturne par une moyenne entre les réſultats des différentes étoiles; j'ai vu que la petite étoile ſans nom, donnoit chaque jour une déclinaiſon d'environ 12 ſecondes plus petite que les autres, c'eſt pourquoi j'ai rejetté l'obſervation de cette étoile dont je préſume que la déclinaiſon tirée du catalogue de *Mayer* eſt de quelques ſecondes trop petite.

La marche de la Pendule déduite des paſſages des étoiles & du Soleil à la lunette méridienne pendant les trois jours, eſt qu'elle accélère ſur le Temps moyen de $11''$, 6 en 24 heures, & le 15 le midi vrai a été obſervé à $0^h. 8'. 33''$. de la Pendule.

5°. Oppoſition de Jupiter en 1784.

Nous obſervames cette Planète, Mr. *Pictet* & moi, le 26, 27, 28 & 30 Aouſt pour la comparer à λ du Capricorne, à ε, ν, σ & 3. ψ du verſeau; les réſultats m'ont fait voir que l'aſcenſion droite de ν du verſeau que j'ai tirée du Catalogue de *Bradley*, eſt d'environ 26 ſecondes

condes trop petite, j'en ai réjetté le réſultat en prenant la moyenne.

Le midi vrai déterminé le 28 par des Hauteurs correſpondantes du Soleil étoit à $0^h. 3'. 37'',9$ de la Pendule dont la marche étoit de retarder ſur le Temps moyen de $2''$, 8 en 24 heures.

L'étoile σ du verſeau ſe trouvant aſſez proche de Jupiter pour pouvoir employer un micromètre filaire adapté à la lunette achromatique de $3\frac{1}{2}$ pieds, nous fimes le 28 & le 30 quelques comparaiſons de la Planète à l'étoile avec cet inſtrument, j'ai réduit ces obſervations à une même époque, ſavoir à l'heure du paſſage de la Planète au méridien; le réſultat eſt ſi approchant de celui qui eſt déduit des obſervations au méridien, que j'ai cru devoir le joindre ici, comme un témoignage de leur exactitude.

Le 28 par 9 obſervations au micrométre	Aſcenſ. droite de ♃	334°. 55′. 31″
	Déclinaiſon -	11. 52. 25
Le 30 par 4 obſervations	Aſcenſ. droite -	334. 40. 36
	Déclinaiſon - -	11. 58. 2

6°. Oppoſition de la Planète d'Herſchel en 1785.

J'ai obſervé cette oppoſition avec les mêmes inſtrumens que les précédentes, mais comme j'etois ſeul, je n'obſervois les paſſages qu'au 1^r. & au 3e fil de la lunette meridienne, & dans l'intervalle je prenois la hauteur au quart-de-cercle, la proximité de mes deux in-

ſtrumens rendoit cela facile. Quoique je n'aye laiſſé échaper aucune nuit favorable depuis le 15 Décembre au 15 Janvier ſuivant par le froid le plus rigoureux, je n'ai pu cependant obſerver que trois fois pendant cet intervalle la Planète au méridien, le 25 & 29 Décembre, & le 5 Janvier, à cauſe du temps nébuleux très-ordinaire dans cette ſaiſon, & c'eſt à ce temps déſavorable que j'attribue les différences qui ſe trouvent entre les différens réſultats d'une même nuit, ſur-tout pour la déclinaiſon. La lumière de la Planète étoit extrèmement affoiblie, & diſparoiſſoit pour peu qu'on éclairat trop les fils de la lunette.

Le midi fut obſervé le 14 Dec^{bre} à $11^h.50'.57'',2$ }
& le 21 - - à $11.53.56,8$ } ce qui donne $4''$

pour le retard de la Pendule ſur le Temps moyen en 24 heures; les paſſages d'étoiles donnent le même réſultat.

Le 2 Janvier la Pendule fut arrêtée par un accident & le midi vrai fut obſervé le 5 Janvier à $11^h.50'.40'',2$, cet arrêt a un peu changé la marche de la Pendule; du 4 au 5 & du 5 au 8, elle a retardé de $5'',3$ ſur le Temps moyen en 24^h.

Voyez à la fin une addition à cette obſervation.

Le détail des obſervations de ces trois oppoſitions, & leurs réſultats ſe trouvent dans les tableaux ſuivans qui ſont diſpoſés de manière à n'avoir beſoin d'aucune explication ultérieure.

Ad-

et 1784 à Avully.

	Différences des hauteurs méridiennes obſervées.	Différences corrigées des effets de la réfract. & de la parallaxe.	Déclinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de la Caille.	Déclin. appar. de Saturne déduites des obſervat.	Obliquité de l'écl. employée dans le Calcul. 23°.27′ 58,7″
- -	0°. 0′. 0″	0°. 0′. 0″	Auſtrales.	Auſtrales.	
trale	0. 8.22	0. 8.23,9	21°.59′.45″,8	21°.51′.22″	
reale	0. 6. 4	0. 6. 3,8	21. 45. 8,6	21. 51.13	
r.	0. 28.52	0. 28.54,5	21. 22. 28,1	21. 51.23	
ſtr.	0. 10.59	0. 11. 1,2	22. 2.29,3	21. 51.28	
reale	0. 30.20	0. 30.22,6	21. 21. 1,7	21. 51.24	
- -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
ſtr.	0. 7.33	0. 7.34,9	- - - -	22. 52.11	
r. -	0. 6.54	0. 6.53,9	- - - -	21. 52. 3	
r. -	0. 29.38	0. 29.40,6	- - - -	21. 52. 9	
ſtr.	0. 10.12	0. 10.14,1	- - - -	21. 52.15	
r. -	0. 31. 8	0. 31.10,7	- - - -	21. 52.12	
- -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
uſtr.	0. 6.48	0. 6.49,8	- - - -	21. 52.56	
r. -	0. 7.39	0. 7.39,0	- - - -	21. 52.48	
r. -	0. 30.28	0. 30.30,7	- - - -	21. 52.59	
uſtr.	0. 9.26	0. 9.28,1	- - - -	21. 53. 1	
r. -	0. 31.58	0. 32. 0,8	- - - -	21. 53. 2	

géoc. calc. s Tab. Halley.	Erreur des Tabl. de H. en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tabl. de Mayer.	Erreur en longit. helioc. des Tables au moment de l'oppoſition.	
′. 55″	−0′.24″	IIIˢ. 22°.59′.14″	de Halley -	−10′.36″
. 50	−0.19	III. 23. 56. 21	de Caſſini -	+ 9. 4
. 45	−0.15	III. 24. 53. 28	de d. l. Lande	+ 8. 56

de Halley augmentées de l'errʳ. { 11′.48″ en long. géoc. / 10. 36 en long. hélioc.

- - - augmentées de l'errʳ. 0. 19 en latit. géoc.

Obſervations de Saturne près de ſon oppoſition-faites le 14, 15 & 16 Juillet 1784 à Avully.

1784.	Noms des étoiles.	Paſſages au mérid. en temps de la Pendule.	Différences des paſſages en Temps de la P.	Différences en Temps moyen.	Différences d'aſcenſ. droite.	Aſcenſ. droites app. des étoiles tirées de Bradley & de la Caille.	Aſcenſ. droites app. de Saturne déduites des obſervat.
Juillet	Saturne - -	$11^h.57'.28'',4$	$0^h.\ 0'.\ 0''$				
	δ du Scorpion	précédoit	3. 40. 8,6	$3^h.40'.\ 6'',8$	$55°.10'.44'',3$	$236°.54'.43'',6$	$292°.\ 5'.28''$
14	Étoile du Sagitt.	précédoit	1. 26. 46,9	1. 26. 46,2	21. 45. 6,8	270. 20. 22,5	292. 5. 27
	2. ξ. du Sagitt.	précédoit	0. 43. 20,5	0. 43. 20,2	10. 51. 49,8	281. 13. 32,4	292. 5. 22
	o. du Sagitt.	précéd.	0. 36. 28,2	0. 36. 27,9	9. 8. 28,3	282. 57. 1,8	292. 5. 30
	π. du Sagitt. -	précéd.	0. 31. 18,3	0. 31. 18,1	7. 50. 48,6	284. 14. 43,6	292. 5. 32
	Saturne - -	$11^h.53'.25'',7$	0. 0. 0			comme cy-deſſus	
	δ. du Scorp. -	précédoit	3. 39. 49,9	3. 39. 48,1	55. 6. 3,5	- - - -	292. 0. 47
15	étoile du Sag.	précéd.	1. 26. 28,2	1. 26. 27,5	21. 40. 25,4	- - - -	292. 0. 48
	2. ξ. du Sagitt.	précéd.	0. 43. 2,0	0. 43. 1,7	10. 47. 11,4	- - - -	292. 0. 44
	o. du Sagitt. -	préc.	0. 36. 9,4	0. 36. 9,1	9. 3. 45,6	- - - -	292. 0. 47
	π. du Sagitt. -	préc.	0. 30. 59,7	0. 30. 59,5	7. 46. 8,8	- - - -	292. 0. 52
	Saturne - -	$11^h.49'.23'',6$	0. 0. 0			comme cy-deſſus	
	δ. du Scorp.	précédoit	3. 39. 31,4	3. 39. 29,6	55. 1. 24,8	- - - -	291. 56. 8
16	étoile du Sag.	précéd.	1. 26. 9,4	1. 26. 8,7	21. 35. 42,7	- - - -	291. 56. 5
	2. ξ. du Sagitt.	préc.	0. 42. 43,4	0. 42. 43,1	10. 42. 31,8	- - - -	291. 56. 4
	o du Sagitt. -	préc.	0. 35. 51,2	0. 35. 50,9	8. 59. 11,8	- - - -	291. 56. 13
	π. du Sagitt. -	précédoit	0. 30. 41,1	0. 30. 40,9	7. 41. 29,0	- - - -	291. 56. 12

1784.	Noms de étoiles.		Différences des hauteurs méridiennes obſervées.	Différences corrigées des effets de la réfract. & de la parallaxe.	Déclinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de la Caille.	Déclin. appar. de Saturne déduites des obſervat.	Obliquité de l'écl. employée dans le Calcul. 23°.27′ 58,7″
Juillet	Saturne - -	- - - -	$0°.\ 0'.\ 0''$	$0°.\ 0'.\ 0''$	Auſtrales.	Auſtrales.	
	δ. du Scorpion	plus Auſtrale	0. 8. 22	0. 8. 23,9	$21°.59'.45'',8$	$21°.51'.22''$	
	ét. du Sagitt.	plus Boreale	0. 6. 4	0. 6. 3,8	21. 45. 8,6	21. 51. 13	
14	2. ξ. du Sagitt.	plus Bor.	0. 28. 52	0. 28. 54,5	21. 22. 28,1	21. 51. 23	
	o. du Sagitt. -	plus Auſtr.	0. 10. 59	0. 11. 1,2	22. 2. 29,3	21. 51. 28	
	π. du Sagitt. -	plus Boreale	0. 30. 20	0. 30. 22,6	21. 21. 1,7	21. 51. 24	
	Saturne - -	- - - -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
	δ. du Scorpion	plus Auſtr.	0. 7. 33	0. 7. 34,9	- - - -	22. 52. 11	
15	étoile du Sag.	plus Bor. -	0. 6. 54	0. 6. 53,9	- - - -	21. 52. 3	
	2. ξ. du Sagitt.	plus Bor. -	0. 29. 38	0. 29. 40,6	- - - -	21. 52. 9	
	o. du Sagitt. -	plus Auſtr.	0. 10. 12	0. 10. 14,1	- - - -	21. 52. 15	
	π. du Sagitt. -	plus Bor. -	0. 31. 8	0. 31. 10,7	- - - -	21. 52. 12	
	Saturne - -	- - - -	0. 0. 0		comme cy-deſſus		
	δ. du Scorp. -	plus Auſtr.	0. 6. 48	0. 6. 49,8	- - - -	21. 52. 56	
16	étoile du Sag.	plus Bor. -	0. 7. 39	0. 7. 39,0	- - - -	21. 52. 48	
	2. ξ. du Sagitt.	plus Bor. -	0. 30. 28	0. 30. 30,7	- - - -	21. 52. 59	
	o. du Sagitt. -	plus Auſtr.	0. 9. 26	0. 9. 28,1	- - - -	21. 53. 1	
	π. du Sagitt. -	plus Bor. -	0. 31. 58	0. 32. 0,8	- - - -	21. 53. 2	

Réſultat.

Juillet	Temps vrai à Avully.	Temps vrai à Paris.	Temps moyen à Paris.	Aſcenſ. droites appar. de ♄ obſervées.	Déclin. appar. de ♄ obſervées Auſtrales.	Longitudes géoc. appar. de ♄ déduites des obſerv.	Longitudes géoc. appar. de ♄ calculées par les Tabl. de Halley.	Erreur des Tab. de H. en longit. géoc.	Latit. géoc. de ♄ obſervées.	Latit. géoc. de ♄ calc. par les Tab. de Halley.	Erreur des Tabl. de H. en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tabl. de Mayer.	Erreurs en longit. helioc. des Tables au moment de l'oppoſition.
14	$11^h.49'.\ 4''$	$11^h.34'.40''$	$11^h.40'.\ 8''$	$292°.\ 5'.28''$	$21°.51'.24''$	$IX^s.\ 20°.25'.45''$	$IX^s.\ 20°.13'.58''$	$-11'.47''$	$0°.\ 3'.\ 19''$ Bor.	$0°.\ 2'.\ 55''$	$-0'.24''$	$III^s.\ 22°.59'.14''$	de Halley - $-10'.36''$
15	11. 44. 44	11. 30. 20	11. 35′. 54	292. 0. 48	21. 52. 12	IX. 20. 21. 21	IX. 20. 5. 33	− 11. 48	0. 3 9	0. 2. 50	− 0. 19	III. 23. 56. 21	de Caſſini - + 9. 4
16	11. 40. 25	11. 26. 1	11. 31. 40	291. 56. 9	21. 53. 0	IX. 20. 16. 57	IX. 20. 5. 9	− 11. 48	0. 3 0	0. 2. 45	− 0. 15	III. 24. 53. 28	de d. l. Lande + 8. 56
Le 11 Juillet	23. 58. 28	23. 44. 4	23. 49. 15	Longitude vraye ſur l'éclipt. de ♄ en oppoſition - - $IX^s.\ 20°.36'.26''$, calculée ſur les Tab. de Halley augmentées de l'err. {11′.48″ en long. géoc. / 10. 36 en long. hélioc.									
				Latitude Boreale géocentrique - - - - - - - 0. 3. 27 - - - - - - - - - - augmentées de l'err. 0. 19 en latit. géoc.									

Aouſt 1784.

	Differences des hauts. mérid. obſervées.	Differences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Déclins. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Déclin. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique. 23°.27'.58"
- -	0°. 0'. 0"		Boreales.	Boreales.	
ſtrale	0. 34. 38	0°.34'.41",7	12°.20'.57",5	11°.46'.16"	
or. -	0. 59. 16	0. 59. 18,6	10. 46. 56,5	11. 46. 15	
- -	0. 0. 0				
or. -	1. 33. 3	1. 33. 7,8	10. 16. 17,7	11. 49. 25	
ſtr. -	0. 24. 25	0. 24. 38,1	12. 13. 57,6	11. 49. 20	
ſtr. -	0. 31. 33	0. 31. 36,5	comme cy-deſſus	11. 49. 21	
or. -	1. 2. 22	1. 2. 24,7	- - - -	11. 49. 21	
- -	0. 0. 0				
or. -	1. 35. 58	1. 36. 2,9	comme cy-deſſus	11. 52. 21	
uſt. -	0. 21. 33	0. 21. 35,9	- - - -	11. 52. 22	
uſt. -	0. 28. 34	0. 28. 37,4	- - - -	11. 52. 20	
or. -	1. 5. 14	1. 5. 16,9	- - - -	11. 52. 13	
- -	0. 0. 0				
or. -	1. 41. 45	1. 41. 50,4	comme cy-deſſus	11. 58. 8	
uſt. -	0. 15. 51	0. 15. 53,4	- - - -	11. 58. 4	
uſt. -	0. 22. 50	0. 22. 52,9	- - - -	11. 58. 5	
or. -	1. 10. 58	1. 11. 1,3	- - - -	11. 57. 58	

oc. ♃ abl. y.	Erreur geoc. des Tables de Halley en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tables de Meyer.	Erreur des Tables en longit. helioc. au moment de l'oppoſition.	
2"	− 0'. 4"	Vˢ. 4°.14'.41",3	de Halley	+ 0'.43"
37	− 0. 17	V. 5. 12. 31,5	de Caſſini	− 4. 24
1	− 0. 22	V. 6. 10. 22,9	de De la Lande	+ 4. 53
8	− 0. 21	V. 8. 6. 11,9		

Tab. de Halley diminuées de l'erreur { 54" en long. géoc. / 43 en long. hélioc.

- - - - augmentées de l'errʳ. 20 en latit. géoc.

Obſervations de Jupiter près de ſon oppoſition faites à Avully le 26, 27, 28 & 30 Aouſt 1784.

1784.	Noms de étoiles.	Paſſages de Jupiter au méridien en Temps de la Pendule.	Différences des paſſages en Temps de la Pendule.	Différences en Temps moyen.	Différences d'aſcenſ. droite.	Aſcenſ. droites appar. des étoiles tirées de Bradley.	Aſcenſ. droites appar. de Jupiter déduites des obſervations.
Aouſt.	Jupiter - -	12^h. 0′.18″,1	0^h. 0′. 0″				
	λ. du Capricor.	précédoit -	0. 45.36,1	0°.45′.36″,2	11°.25′.55″.4	323°.44′.28″,5	335°.10′.24″
26	σ. du verſeau	préc. - -	0. 1.24,9	0. 1.24.9	0. 21. 17,0	334. 49. 6,2	335. 10. 23
	3.ψ.du verſeau	ſuivoit - -	0. 46.57,6	0. 46. 57,7	11. 46. 21,2	346. 56. 46,1	335. 10. 25
	Jupiter - -	11^h.55′.49″,1	0. 0. 0				
	ε du verſeau -	précéd. -	1. 43. 52,3	1. 43. 52,5	26. 2. 23,4	309. 0. 36,0	335. 2. 59
27	ν du verſeau -	préc. - -	1. 22. 5,4	1. 22. 5,6	20. 34. 46,2	314. 27. 47,9	335. 2. 34
	λ. du Capric. -	préc. - -	0. 45. 6,7	0. 45. 6,8	11. 18. 33,1	comme cy-deſſus	335. 3. 2
	3.ψ.du verſeau	ſuivoit - -	0. 47. 27,2	0. 47. 27,3	11. 53. 46,4	- - - -	335. 3. 0
	Jupiter - -	11^h.51′.20″,9	0. 0. 0				
	ε. du verſeau -	précéd. -	1. 43. 22,7	1. 43. 22,9	25. 54. 58,2	comme cy-deſſus	334. 55. 34
28	ν. du verſeau -	préc. - -	1. 21. 35,7	1. 21. 35,9	20. 27. 19,4	- - - -	334. 55. 7
	λ. du Capric. -	préc. - -	0. 44. 37,3	0. 44. 37,4	11. 11. 10,9	- - - -	334. 55. 39
	3.ψ.du verſeau	ſuivoit. -	0. 47. 57,0	0. 47. 57,1	12. 1. 14,6	- - - -	334. 55. 32
	Jupiter - -	11^h.42′.25″,2	0. 0. 0			comme cy-deſſus	
	ε. du verſeau -	précéd. -	1. 42. 23,0	1. 42. 23,2	25. 40. 0,2	- - - -	334. 40. 36
30	ν. du verſeau -	préc. - -	1. 20. 36,2	1. 20. 36,3	20. 12. 23,1	- - - -	334. 40. 11
	λ. du Capric. -	préc. - -	0. 43. 37,6	0. 43. 37,7	10. 56. 13,0	- - - -	334. 40. 41
	σ. du verſeau	ſuivoit - -	0. 0. 33,7	0. 0. 33,7	0. 8. 26,8	- - - -	334. 40. 39
	3.ψ.du verſeau	ſuiv. - -	0. 48. 56,3	0. 48. 56,4	12. 16. 6,6	- - - -	334. 40. 39

1784.	Noms de étoiles		Differences des hauts. mérid. obſervées.	Differences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Déclins. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Déclin. appar. de Jupiter déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique. 23°.27′.58″
Aouſt.	Jupiter - -	- - - -	0°. 0′. 0″		Boreales.	Boreales.	
26	λ. du Capric.	plus Auſtrale	0. 34. 38	0°.34′. 41″,7	12°.20′.57″,5	11°.46′.16″	
	3.ψ.du verſeau	plus Bor. -	0. 59. 16	0. 59. 18,6	10. 46. 56.5	11. 46. 15	
	Jupiter - -	- - - -	0. 0. 0				
	ε. du verſeau -	plus Bor. -	1. 33. 3	1. 33. 7,8	10. 16. 17,7	11. 49. 25	
27	ν. du verſeau -	plus Auſtr. -	0. 24. 25	0. 24. 38,1	12. 13. 57,6	11. 49. 20	
	λ. du Capric.	plus Auſtr. -	0. 31. 33	0. 31. 36,5	comme cy-deſſus	11. 49. 21	
	3.ψ.du verſeau	plus Bor. -	1. 2. 22	1. 2. 24,7	- - - -	11. 49. 21	
	Jupiter - -	- - - -	0. 0. 0				
	ε. du verſeau -	plus Bor. -	1. 35. 58	1. 36. 2,9	comme cy-deſſus	11. 52. 21	
28	ν. du verſeau -	plus Auſt. -	0. 21. 33	0. 21. 35,9	- - - -	11. 52. 22	
	λ. du Capric.	plus Auſt. -	0. 28. 34	0. 28. 37,4	- - - -	11. 52. 20	
	3.ψ.du verſeau	plus Bor. -	1. 5. 14	1. 5. 16,9	- - - -	11. 52. 13	
	Jupiter - -	- - - -	0. 0. 0				
30	ε du verſeau -	plus Bor. -	1. 41. 45	1. 41. 50,4	comme cy-deſſus	11. 58. 8	
	ν. du verſeau -	plus Auſt. -	0. 15. 51	0. 15. 53,4	- - - -	11. 58. 4	
	λ. du Capric. -	plus Auſt. -	0. 22. 50	0. 22. 52,9	- - - -	11. 58. 5	
	3 ψ.du verſeau	plus Bor. -	1. 10. 58	1. 11. 1,3	- - - -	11. 57. 58	

Réſultat.

1784. Aouſt.	Temps vrai à Avully.	Temps vrai à Paris.	Temps moyen à Paris.	Aſcenſ. droites appar. de ♃ obſervées.	Déclin. appar. de ♃ obſervées Boreales.	Longitud. géoc. appar. de ♃ obſervées.	Longit. géoc. appar. de ♃ tirées des Tables de Halley.	Erreur des Tabl. de Halley en long. géoc.	Latitud. géoc. appar. de ♃ obſervées.	Latit. géoc. appar. de ♃ tirée des Tabl de Halley.	Erreur geoc. des Tables de Halley en latit. géoc.	Lieu vrai du ☉ calculé par les Tables de Meyer.	Erreur des Tables en longit. helioc. au moment de l'oppoſition.
26	11^h.56′. 9″	11^h.41′.45″	11^h.42′.57″	335°.10′.24	11°.46′.15″	XI^s.2°.42′.56″	XI^s.2°.43′.49″	+ 0′.53″	1°.20′.36″ Auſt.	1°. 20′. 32″	− 0′. 4″	V^s. 4°.14′.41″,3	de Halley + 0′.43″
27	11. 52. 1	11. 37. 37	11. 38. 31	335. 3. 0	11. 49. 22	XI. 2. 35. 3	XI. 2. 35. 58	+ 0. 55	1. 20. 54	1. 20. 37	− 0. 17	V. 5. 12. 31,5	de Caſſini − 4. 24
28	11. 47. 53	11. 33. 39	11. 34. 5	334. 55. 35	11. 52. 20	XI. 2. 27. 12	XI. 2. 28. 5	+ 0. 53	1. 21. 3	1. 20. 41	− 0. 22	V. 6. 10. 22,9	de De la Lande + 4. 53
30	11. 39. 18	11. 24. 54	11. 25. 13	334. 40. 39	11. 58. 5	XI. 2. 11. 29	XI. 2. 12. 26	+ 0. 57	1. 21. 9	1. 20. 48	− 0. 21	V. 8. 6. 11,9	
Le 25 Aouſt.	2. 23. 21	2. 8. 57	2. 10. 34										

Longitude vraie ſur l'Ecliptique de Jupiter en oppoſition XI^s. 2°. 53′. 40″, calculée par les Tab. de Halley diminuées de l'erreur { 54″ en long. géoc. / 43 en long. helioc.

Latitude géocentrique Auſtrale - - - - - - - - - 1. 20. 46 - - - - - - - - - - augmentées de l'err^r. 20 en latit. géoc.

Décembre 1784 & 5 Janvier 1785.

	Différences des hauteurs méridiennes obſervées.	Différences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Declinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de Mayer.	Declin. app de la Planète déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique 23°. 27'.58"
- - -	0°. 0'. 0"		Boreales.	Boreales.	
lus Auſtrale	0. 31. 48	0°.31'.48",6	22°.32'.36",4	23°.4'.25"	
lus Auſt.	0. 37. 59	0. 37. 59,7	22. 26. 33,6	23. 4. 33	
lus Bor.	0. 21. 13	0. 21. 13,4	23. 25. 49,4	23. 4. 36	
lus Auſt.	0. 45. 55	0. 45. 55,9	22. 18. 53,0	23. 4. 49	
lus Auſt.	0. 32 34	0. 32. 34,7	22. 31. 54,8	23. 4. 29	
us Bor.	0. 31. 24	0. 31. 24,6	23. 35. 58,8	23. 4. 34	
us Bor.	0. 11. 4	0. 11. 4,2	23. 15. 38,4	23. 4. 34	
us Auſt.	0. 31. 11	0. 31. 11,6	22. 33. 14,5	23. 4. 26	
us Auſt.	0. 27. 41	0. 27. 41,6	22. 36. 34,7	23. 4. 16	
us Auſt.	1. 4. 38	1. 4. 39,3	21. 59. 58,8	23. 4. 38	
us Auſt.	0. 7. 45	0. 7. 45,2	22. 56. 41,6	23. 4. 27	
- - -	0. 0. 0				
us Auſt.	0. 33. 0	0. 33. 0,6	comme cy deſſus.	23. 5. 37	

Obſervations de la Planète d'Herſchel près de ſon Oppoſition, faites à Avully le 25 & 29 Décembre 1784 & 5 Janvier 1785.

1784.	Noms des étoiles.	Paſſages de la Planète au méridien en Temps de la Pendule.	Différences des paſſages en Temps de la Pendule.	Retard de la Pendule ſur le T. moyen pend. l'interv.	Différences d'aſcenſ. droite.	Aſcenſ. apparente des étoiles tirées de Bradley & de Mayer.	Aſcenſ. apparentes de la Planete déduites des obſervations.
Dec.	Planète - - -	12ʰ.38'.36",0	0ʰ. 0'. 0",	- - -	- - - -	- - - -	- - - -
	λ. du belier -	précedoit -	5. 17. 30, 6	- - 0", 8	79°.35'.52",9	26°.30'.12",7	106°. 6'. 6"
	α. du belier -	precedoit -	5. 8. 25, 5	- - 0, 8	77. 19. 14, 5	28. 46. 32, 0	106. 5.47
	η. des Pleyades	précédoit -	3. 29. 3, 0	- - 0, 6	52. 24. 29, 1	53. 41. 28, 5	106. 5.58
	ν. préc. du taureau	precedoit -	2. 50. 25, 5	- - 0, 5	42. 43. 30, 0	63. 22. 22, 9	106. 5.53
	τ. du taureau -	précédoit -	2. 34. 34, 3	- - 0, 4	38. 45. 1, 4	67. 20. 57. 0	106. 5.58
25.	étoile d'orion -	precedoit -	2. 19. 11, 6	- - 0. 4	34. 53. 43, 0	71. 12. 18, 3	106. 6. 1
	H. des gemeaux	précédoit -	1. 13. 6. 1	- - 0, 2	18. 19. 34, 7	87. 46. 23, 3	106. 5.58
	η. des gemeaux	précédoit -	1. 2. 17, 3	- - 0, 2	15. 36. 55, 9	90. 29. 6, 3	106. 6. 2
	μ. des gemeaux	précédoit -	0. 54. 15, 8	- - 0, 2	13. 36. 13, 7	92. 29. 46, 4	106. 6. 0
	d. des gemeaux	précédoit -	0. 25. 38, 3	- - 0, 1	6. 25. 39, 2	99. 40. 23, 3	106. 6. 2
	ω. ſuiv. des gem.	precedoit -	0. 11. 58 5	- - 0. 0	3. 0. 7. 0	103. 5. 51, 0	106. 5.58
	Planète - -	12ʰ.21'.51",5	0. 0. 0,	- -	- - - -	- - - -	- - - -
	λ. du belier -	précédoit -	5 16 45, 8	- - 0. 8	79. 24. 39, 1	26. 30. 11, 8	105. 54. 51
	α. du belier -	précédoit -	5. 7. 41, 0	- - 0. 8	77. 8. 5, 1	28. 46. 31, 1	105. 54. 36
	η. des Pleyades	précédoit -	3. 28. 18. 5	- - 0. 6	52. 13. 19, 8	53. 41. 27, 9	105 54.48
	ν. préc. du taureau	précédoit -	2. 49. 40, 8	- - 0. 5	42. 32. 17, 6	63. 22. 22, 6	105. 54.40
29.	τ. du taureau -	precedoit -	2. 33. 49, 9	- - 0. 4	38. 33. 53, 5	67. 20 56, 7	105. 54.50
	α. d'Orion -	précédoit -	2. 18. 27, 0	- - 0. 4	34 42. 32, 7	71. 12. 18, 2	105. 54. 51
	H. des gemeaux	precedoit -	1. 12 22. 0	- - 0. 2	18. 8. 31, 3	87. 46. 23, 8	105. 54.55
	η. des gemeaux	précédoit -	1. 1. 32, 8	- - 0. 2	15. 25. 46, 6	90. 29. 6, 8	105. 54.53
	μ. des gemeaux	précédoit -	0. 53. 30, 8	- - 0. 2	12. 24. 56, 9	92. 29. 46, 9	105. 54.44
	d. des gemeaux	précédoit -	0. 24. 53, 9	- - 0. 1	6. 14. 31, 3	99. 40. 24, 1	105. 54.55
	ω. 2. des gem.	précédoit -	0. 11. 14, 1	- - 0. 0	2. 48. 59, 2	103. 5. 51, 9	105. 54. 51
1785.	Planète - - -	11ʰ.43'. 5",2	0. 0. 0,	- - -	- - - -	- - - -	- - - -
Janvier.	α. du belier -	precedoit -	5. 6. 23, 2	- - 1 1	76. 48. 39, 5	28. 46. 29, 7	105. 35. 9
	H. des gemeaux	précédoit -	1. 11. 3, 0	- - 0. 2	17. 48. 43, 0	87. 46. 24, 1	105. 35. 7
	η. des gemeaux	précédoit -	1. 0. 14, 6	- - 0. 2	15. 6. 10, 4	90. 29. 7. 2	105. 35. 18
5.	μ. des gemeaux	précédoit -	0. 52. 13, 0	- - 0. 2	13. 5. 26, 6	92. 29. 47, 4	105. 35.14
	d. des gemeaux	précédoit -	0. 23. 35, 7	- - 0. 1	5. 54. 55, 1	99. 40. 25, 0	105. 35.20
	δ. des gemeaux.	ſuivoit -	0. 4. 56, 3	- - 0. 0	1. 14. 16, 7	106. 49. 40, 4	105. 35.24

1784.	Noms des étoiles		Différences des hauteurs méridiennes obſervées.	Différences corrigées de la refraction & de la parallaxe.	Declinaiſ. appar. des étoiles tirées de Bradley & de Mayer.	Declin. app de la Planète déduites des obſervations.	Obliquité de l'écliptique 23°. 27'.58"
Déc.	Planète - - -	- - -	0°. 0'. 0"		Boreales.	Boreales.	
	λ. du belier -	plus Auſtrale	0. 31. 48	0°.31'.48",6	22°.32'.36",4	23°.4'.25"	
	α du belier -	plus Auſt.	0. 37. 59	0. 37. 59, 7	22. 26. 33, 6	23. 4. 33	
	η. des Pleyades	plus Bor.	0. 21. 13	0. 21. 13, 4	23. 25. 49, 4	23. 4. 36	
	ν. préc. du taureau	plus Auſt.	0. 45. 55	0. 45. 55, 9	22. 18. 53, 0	23. 4. 49	
	τ. du taureau -	plus Auſt.	0. 32 34	0. 32. 34, 7	22. 31. 54, 8	23. 4. 29	
25.	étoile d'orion	plus Bor.	0. 31. 24	0. 31. 24, 6	23. 35. 58, 8	23. 4. 34	
	H. des gemeaux	plus Bor.	0. 11. 4	0. 11. 4, 2	23. 15. 38, 4	23. 4. 34	
	η. des gem.	plus Auſt.	0. 31. 11	0. 31. 11, 6	22. 33. 14, 5	23. 4. 26	
	μ. des gem.	plus Auſt.	0. 27. 41	0. 27. 41, 6	22. 36. 34, 7	23. 4. 16	
	d. des gem.	plus Auſt.	1. 4. 38	1. 4. 39, 3	21. 59. 58, 8	23. 4. 38	
	ω. ſuiv. des gem.	plus Auſt.	0. 7. 45	0. 7. 45, 2	22. 56. 41. 6	23. 4. 27	
	Planète - - -	- - -	0. 0. 0				
	λ. du belier -	plus Auſt.	0. 33. 0	0. 33. 0, 6	comme cy deſſus.	23. 5. 37	
	α. du belier -	plus Auſt.	0. 39. 11	0. 39. 11, 7	- - - -	23. 5. 45	
	η. des Pleyades	plus Bor.	0. 20. 12	0. 20. 12, 4	- - - -	23. 5. 37	
	ν. du taureau -	plus Auſt.	0. 46. 56	0. 46. 56, 9	- - - -	23. 5. 50	
	τ. du taureau -	plus Auſt.	0. 33. 47	0 33. 47, 7	- - - -	23 5. 42	
29.	étoile d'orion -	plus Bor.	0. 30. 16	0. 30. 16, 6	- - - -	23. 5. 42	
	H. des gemeaux	plus Bor.	0. 9. 56	0. 9. 56, 2	- - - -	23. 5. 42	
	η. des gem.	plus Auſt.	0. 32. 18	0. 32. 18, 6	- - - -	23. 5. 33	
	μ. des gem.	plus Auſt.	0. 28. 58	0. 28. 58, 6	- - - -	23. 5. 33	
	d. des gem.	plus Auſt.	1. 5. 31	1. 5. 32, 3	- - - -	23. 5. 31	
1785.	Planète - - -	- - -	0. 0. 0				
Janvier.	α. du belier -	plus Auſt.	0. 40. 59	0. 40. 59, 7	comme cy deſſus	23. 7. 33	
	H. des gemeaux	plus Bor.	0. 8. 16	0. 8. 16, 2	- - - -	23. 7. 22	
	η. des gem.	plus Auſt.	0. 34. 10	0. 34. 10, 7	- - - -	23. 7. 25	
5.	μ. des gem.	plus Auſt.	0. 30. 43	0. 30. 43, 6	- - - -	23. 7. 18	
	d. des gem.	plus Auſt.	1. 7. 18	1. 7. 19, 2	- - - -	23. 7. 18	
	δ. des gem.	plus Auſt.	0. 45. 38	0. 45. 38, 9	22. 21. 46, 9	23. 7. 26	

Réſultat.

	Temps vrai à Avully.	Temps vrai à Paris.	Temps moyen à Paris.	Accenſions droites appar. de la Planète obſervées.	Déclin. appar. de la Plan obſervées.	Longit. géocent. appar. de la Planète obſervées.	Latitud. géocent. appar. de la Plan. obſervées.	Longit. géoc. appar. de la Plan. par les Tables Conn. d. T. 1787.	Latit. géoc. de la Plan. Tables id.	Erreur des Tables en long. géoc.	Erreur des Tables en latit. géoc.
Dec. 25	12ʰ.42'.42"	12ʰ.28'.18"	12ʰ.29'.31"	106°. 6'. 0"	23°.4'.31" Bor.	IIIˢ. 14°.46'.54"	0°.25'.57" Bor.	IIIˢ. 14°. 47'. 9"	0°.25'.25"	+ 15"	− 32"
29	12 24. 17	12. 9. 53	12. 13. 3	105. 54. 50	23. 5. 34	III. 14. 36. 34	0. 25. 51	III. 14. 36. 52	0. 25. 28	+ 18	− 23
Janv. 5	15. 52. 15	11. 37. 51	11. 44. 15	105. 35. 17	23. 7. 22	III. 14. 18. 35	0. 25. 43	III. 14. 18. 41	0. 25. 32	+ 6	− 11

Addition à l'obſervation de l'oppoſition de la Planète d'Herſchel.

Après avoir achevé & mis au net mes calculs des obſervations de la Planète *d'Herſchel* j'ai reçu la connoiſſance des Temps pour l'année 1787, dans laquelle on trouve des Tables des mouvemens de cette Planète; j'ai calculé auſſi-tot la longitude & latitude géocentrique de la Planète pour les trois jours où je l'avois obſervée, j'ai mis à la ſuite du réſultat des obſervations, leur différence d'avec le calcul des tables. Ces différences devroient être les mêmes pour les trois jours, on verra que le réſultat du 5 Janvier diffère un peu des deux autres, c'eſt pourquoi en prenant une moyenne entre ceux du 25 et 29 Décembre, & laiſſant de coté celui du 5 Janvier, je trouve que les Tables donnent une longitude géocentrique de $16''$ trop grande, & une latitude géocentrique de $27''$ trop petite.

D'après cela il ſuit que l'oppoſition a eu lieu le 3 Janvier 1785 à $17^h : 46' \frac{1}{2}$ Temps moyen à Paris.

La longitude vraye de la Planète ſur l'écliptique étoit alors de $3^s. 14°. 22'. 32''$

& ſa latitude géocentrique Boreale de - - $0°. 25'. 57''$.

COM-

COMMENTATIO
DE
ECLIPSI SOLIS
Anno 1779 die $\frac{3}{14}$ Iunii Obſeruata.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKI.

§. 1.

In parte I. Actorum Academiae Scientiarum ad annum 1779 edita de Eclipſi hac differens deficientibus tunc temporis obſeruationibus, coactus fui ex comparatione binarum tantum Petropolitane ſc. et Göttingenſis in errorem Tabularum Lunarium inquirere; id circo correctiones ibi erutae merito dubiae videri poterant. Poſtquam vero ad manus peruenere obſeruationes eiusdem Eclipſeos in aliis locis peractae, reuocaui eas ad calculum, et cum ad easdem propemodum deductus ſim concluſiones, conſtitui calculos meos in confirmationem antecedentium determinationum breuiter coram Academia exponere.

§. 2. Initium faciam a relatione ipſarum obſervationum:

Petropoli	Initium.	$22^h. 0'. 25''$. t. v.	Latitudo	$59°. 56'. 23''$
	Finis	23. 22. 21.		
Göttingae	Initium	20. 9. 55.		51. 31. 54
	Finis	21. 23. 22.		

War-

Warſowiae	Initium	21.^{h}. 14$'$. 33$''$. t. v.	Lutitudo	52°. 14$'$. 0$''$
	Finis	22. 10. 42		
Cremiſani	Initum	20. 37. 15	- - -	48. 3. 36
	Finis	21. 23. 26		
Vltraiecti	Initium	19. 43. 52	- - -	52. 5. 0
	Finis	21. 4. 40		
Dresdae	Initium	20. 31. 21	- - -	51. 2. 54
	Finis	21. 26. 27		
Miſniae	Initium	20. 29. 45	- - -	51. 9. 0
	Finis	21. 35. 58		
Maſſiliae	Finis	20. 31. 26	- - -	43. 17. 45

Aſſumtis elementis Tabularibus iisdem, qualia in diſſertatione memorata exhibita ſunt, vbi in Longitudine Lunae momento 20^h reſpondente loco 33$'$ legendum eſt 23$'$. computo inſtituto obtinui.

Loca		Long. ☽ vera.	Latit. ☽ vera	Parall. Long. ☽	Parall. Latit. ☽	½ Dam. ☽ appar.
Petrop.	pro initio	82°. 23$'$. 13$''$	1°. 0$'$ 46,$''$9	+12$'$. 53$''$,7	−38$'$. 53$''$,7	1012,$''$2
	pro fine	83 14 8,2	1 5 23,5	3 18,9	36 0,3	1013,4
Götting.	pro initio	82 4 54,2	59 7,2	29 54,1	36 51,7	1010,0
	pro fine	82 50 51,6	1 3 17,1	22 28,3	32 41,3	1012,6
Warſov.	pro initio	82 16 46,5	1 0 12,7	22 43,2	33 45,4	1012,1
	pro fine	82 52 42	1 3 27,1	15 38,5	31 12,0	1013,8
Cremiſ.	pro initio	82 11 25,5	59 42,6	29 42,0	32 23,3	1011,3
	pro fine	82 40 18,8	1 0 19,8	24 17,1	29 41,5	1013,2
Vltraject.	pro initio	82 0 29	58 43,2	31 39,5	38 53,8	1009,0
	pro fine	82 51 1	1 3 18	24 25,3	34 6,0	1011,9
Dreſd.	pro initio	82 12 11,3	59 46,8	28 15,6	35 10,4	1010,8
	pro fine	82 49 35,5	1 3 10,1	21 0	31 38,2	1012,9
Miſniae	pro initio	82 8 22	59 26,1	28 26,4	35 28,4	1010,7
	pro fine	82 49 48,2	1 3 11,3	21 1,4	31 44,5	1012,8
Maſſil.	pro fine	82 29 42	1 1 22,1	33 39,5	28 43,7	1011,3

 §. 3.

§. 3. Si nunc correctio ſummae Semidiametrorum Solis et Lunae dicatur δ, Latitudinis Lunae y et Parallaxis Lunae π, poſita $\frac{1}{2}$ Diametro Solis $15'.47'',5 = 947'',5$, pro tempore coniunctionis obtinebuntur ſequentes expreſſiones:

Petropoli ex initio	$23^h.$	$3'.$	$3''$	$+ 2,37\delta$	$- 1,64y$	$+ 1,39\pi$	
ex fine	23	7	37	$- 3,89\delta$	$+ 3,50y$	$- 2,16\pi$	
Hinc I.			34	$- 6,26\delta$	$+ 5,14y$	$- 3,57\pi$	$= 0.$
Göttingae ex initio	21	41	43	$+ 2,33\delta$	$- 1,59y$	$+ 1,79\pi$	
ex fine	21	42	10	$- 4,87\delta$	$+ 4,56y$	$- 3,06\pi$	
Hinc II.			27	$- 7,20\delta$	$+ 6,15y$	$- 4,85\pi$	$= 0.$
Warſoviae ex initio	22	25	53	$+ 2,92\delta$	$- 2,37y$	$+ 1,94\pi$	
ex fine	22	28	29	$- 10,68\delta$	$+ 10,54y$	$- 5,82\pi$	
Hinc III.		156		$- 13,60\delta$	$+ 12,91y$	$- 7,76\pi$	$= 0.$
Cremiſani ex initio	21	58	27	$+ 3,12\delta$	$- 2,61y$	$+ 2,21\pi$	
ex fine	22	2	5	$- 33,89\delta$	$+ 33,77y$	$- 15,77\pi$	
Hinc IV.			218	$- 37,01\delta$	$+ 36,38y$	$- 17,98\pi$	
Vltraiecti ex initio	21	21	52	$+ 2,15\delta$	$- 1,30y$	$+ 1,71\pi$	
ex fine	21	21	7	$- 3,76\delta$	$+ 3,36y$	$- 1,20\pi$	
Hinc V.		$-$	45	$- 5,91\delta$	$+ 4,66y$	$- 1,88\pi$	
Dresdae ex initio	21	56	48	$+ 2,55\delta$	$- 1,90y$	$+ 1,88\pi$	
ex fine	21	57	37	$- 6,51\delta$	$+ 6,28y$	$- 3,84\pi$	
Hinc VI.			49	$- 9,06\delta$	$+ 8,18y$	$- 5,72\pi$	$= 0.$
Misniae ex initio	21	56	9	$+ 2,51\delta$	$- 1,84y$	$+ 1,86\pi$	
ex fine	21	56	44	$- 6,29\delta$	$+ 6,05y$	$- 3,69\pi$	
Hinc VII.			35	$- 8,80\delta$	$+ 7,89y$	$- 5,55\pi$	$= 0.$

Pro

Pro Maſſilia non comparet hic momentum coniunctionis, quia Latitudo Lunae apparens praeciſe aequalis reperiatur ſummae Semidiametrorum Solis et Lunae.

§. 4. Obſeruationes, ex quibus aequationes iſtae deductae ſunt, non omnes pari gaudent exactitudine: de certitudine initii aeque ac finis Petropoli obſeruati intime conuictus ſum, id circo obſeruationem Petropolitanam fundamenti loco ſubſternere non dubito. Cremiſani verum initium Eclipſeos obſeruare non licuit, et in computo pro initio eiusmodi momentum adhibitum eſt, quo obſeruatori contactus limborum Solis et Lunae ſenſibilis iam apparuerit: par ratio eſt cum initio Dresdae obſeruato. Quam obrem Cremiſani ac Dresdae momenta initii iure aliquot ſecundis minuere licebit, ſi aequationes inuentae id ſuadere videantur.

§. 5. Quoniam in aequationibus, quas praebent obſeruationes Warſouienſis et Cremiſanenſis coefficientes ipſorum δ, y et π ſunt admodum magni, eae tuto ad eruendas correctiones in vſum vocari nequeunt, et leui adhibita attentione patet aequationem V minime cum reliquis conſiſtere poſſe. Sepoſitis igitur aequationibus pro Warſouia, Cremiſano et Vtraiecto videndum eſt, quinam proxime valores pro δ, y et π ſubſtituendi ſatisfaciant reliquis aequationibus: nempe

$$\text{I. } 34 - 6,26\,\delta + 5,14\,y - 3,57\,\pi = 0.$$
$$\text{II. } 27 - 7,20\,\delta + 6,15\,y - 4,85\,\pi = 0.$$
$$\text{VI. } 49 - 9,06\,\delta + 8,18\,y - 5,72\,\pi = 0.$$
$$\text{VII. } 35 - 8,80\,\delta + 7,89\,y - 5,55\,\pi = 0.$$

Numeri harum aequationum abſoluti, ob incertitudinem quae ipſis obſeruationibus praeſertim initio ineſſe poteſt, prorſus exacti eſſe nequeunt, id circo plenarius earum conſenſus minime eſt expectandus. In definiendis itaque correctionibus ita erit procedendum, vt faciendo non nullas hypotheſes pro valore ipſius π videamus, quinam proxime pro δ et y valores ſint ſubſtituendi, vt ſatisfactum ſit allatis aequationibus. Ex multifariis Beati *Lexell* disquiſitionibus conſtat valorem ipſius π, ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus ille ſit, nusquam 3 ſcrupula ſecunda excedere, et menſura Diametri Solaris Cremiſani capta monſtrat Tabulas praebere Diametrum Solis 5″ iuſto maiorem; fingendo igitur pro π et δ varias hypotheſis, modo limites ipſius π inter -1 et -3, et ipſius δ inter -2 et -5 conſiſtant, minimus valor ipſius y, qui aequationibus noſtris proxime ſatisfacit, reperitur $y = -7$, et maximus $y = -14,7$ et vt plurimum recurrunt $y = -12$ et $y = -13$. Tutiſſime igitur acturum me exiſtimo, ſi ſtatuam $\pi = -1$, $\delta = -4$, et $y = -13$; quo poſito ſequentia momenta reſultabunt:

Petropoli	ex initio	23ʰ.	3′.	13″
	ex fine	23.	3.	9
Göttingae	ex initio	21.	41.	52
	ex fine	21.	41.	34

Dres-

Dresdae	ex initio	21^h.	$57'$.	$1''$
	ex fine	21.	56.	46
Misnia	ex initio	21.	56.	21
	ex fine	21.	55.	54.

§. 5. Vt iudicium ferri queat de exactitudine correctionum ſupra allatarum, quaeri conueniet ex momentis coniunctionum ex initio ac fine deductarum eiusmodi momenta, quae vel prorſus non, aut vix pendeant a correctionibus δ, y et π. Reſumtis igitur expreſſionibus ſupra relatis habebitur eiusmodi tempus coniunctionis:

Petropoli	$23^h.\ 3'.\ 13''$	$+ 0,28\,\delta + 0,07\,y + 0,21\,\pi$.
Göttingae	21. 41. 52	$- 0,07\,\delta + 0,46\,y + 0,18\,\pi$.
Dresdae	21. 57. 0	$+ 0,04\,\delta + 0,56\,y + 0,45\,\pi$.
Misniae	21. 56. 18	$+ 0,31\,\delta + 0,13\,y + 0,47\,\pi$.

Momenta coniunctionum pro Petropoli et Misnia hoc modo elicta tribuendo ipſi y valorem $- 13$ nullam ſubibunt mutationem, pro Göttinga vero et Dresda reſultabunt momenta paucis ſecundis diuerſa ab iis, quae ſupra reperta ſunt; id circo valores pro δ, y et π ſupra allatos ſi non pro veris, aſt ſaltem vero proximis iure aſſumi poſſe exiſtimo.

§. 7. Mulctata iam Latitudine Lunae $12''$ ad calculum denuo reuocaui obſeruationes Warſouienſem, Cremifanenſem et Maſſilienſem, et computo peracto reperi momentum coniunctionis:

 War-

Warſouiae ex initio $22^h.26'.21''+2{,}88\delta-2{,}32y+1{,}91\pi$
ex fine $22.\ 26.\ 20-8{,}80\delta+8{,}63y-5{,}82\pi$
Hinc III. $-1-11{,}68\delta+10{,}95y-7{,}73\pi=0.$

Cremiſani ex initio $21.\ 58\ 58+3{,}07\delta-2{,}56y+2{,}19\pi$
ex fine $21.57.52-14{,}21\delta+14{,}12y-8{,}00\pi$
Hinc IV. $-66-17{,}28\delta+16{,}68y-10{,}19\pi=0.$

Maſſiliae ex fine $21.22.33-14{,}97\delta+14{,}86y-7{,}94\pi.$

Hic primum obſeruo differentiam Meridianorum Cremiſanum et Maſſiliam inter independentem a correctionibus ſequi $35'.\ 19''$, et poſito $\pi=-1$, $\delta=-4$ et $y=-1$, ſatisfieri aequationi pro Cremiſano, vt tota correctio Latitudinis ſit $-13''$, momenta vero coniunctionum et Longitudines locorum a Meridiano Petropolitano computatae prodibunt, vt ſequitur:

		Tempus coniunct.	Longitudo a Petropoli.
Petropoli	ex initio	$23^h.\ 3'.\ 13''$	
	ex fine	23. 3. 9	
Göttingae	ex initio	21. 41. 52	$1^h.\ 21'.\ 21''$
	ex fine	21. 41. 34	1. 21. 35
Warſouiae	ex initio	22. 26. 11	37. 2
	ex fine	22. 26. 54	36. 15
Cremiſani	ex initio	21. 58. 46	1. 4. 27
	ex fine	21. 58. 42	1. 4. 27
Dreſdae	ex initio	21. 57. 1	1. 6. 12
	ex fine	21. 56. 46	1. 6. 23
Miſniae	ex initio	21. 56. 21	1. 6. 52
	ex fine	21. 55. 54	1. 7. 15
Maſſiliae	ex fine	21. 23. 25	1. 39. 44

§. 8.

§. 8. Diſcrimen, quod hic occurrit inter Longitudines non nullorum locorum a Longitudinibus eorundem per alias obſeruationes ſtabilitis, non tantum eſt, vt illud incertitudini ipſarum obſeruationum tribui nequeat, excepta Longitudine Warſouiae ex fine deducta, quae non aliter ad conſenſum cum cognita reducitur, niſi in fine Warſouiae obſeruato loco $10'$ legantur $9'$. Cum itaque tempus coniunctionis Petropoli ſit $23^h. 3'. 12''$, et Longitudo eiusdem a Grenouico maior $2^h. 1'. 20''$ vix ſtatui queat, habebitur tempus coniunctionis ad Meridianum Grenouicenſem $21^h. 1'. 52''$, pro quo Longitudo Solis reperitur $83°. 2'. 22'',4$, et cum Tabulae *Maieri* pro eodem temporis momento dent Longitudinem Lunae $83°. 2'. 8'',1$ et Latitudinem $1°. 4'. 19'',3$ prodibit correctio earum in Longitudinem $+ 14'',3$ exiſtente Latitudine Lunae $1°. 4'. 6'',3$.

§. 9. Circa eandem Eclipſim Dresdae et Cremiſani obſeruatae ſunt diſtantiae cornuum, quas licet ad tempora coniunctionum eruenda iuxta methodum Beati *Lexell* non ſatis aptas reperio, attamen ad calculum illas reuocare et computum Academiae exponere ideo duxi, quod in Calendario Berolinenſi ad annum 1785 exſtet computus Cremiſanenſium a Patre *Fixlmillnero* inſtitutus, ex quo tempus coniunctionis ad Meridianum Cremiſanenſem concluditur $21^h. 58'. 15''$, correctio in Longitudinem $+ 23$ et Latitudinem $- 21''$. Initium facturus a Dresda calculum Parallaxium pro ſequentibus primum momentis inſtitui:

Temp.

Temp. ver. Dresdenſe.	Latit. ☽ vera.	Parall. Long. ☽	Parall. Latit.	Latit. ☽ appar.	½Diam.☽ appar.
20^h.31′.21″	59′.28′,7	1695″,3	2110″,4	1458″,3	1010,8
20. 40. 0	59. 58,3	1645,1	2080,6	1517,7	1011,1
20. 50. 0	1. 0. 32,4	1582,7	2044,9	1587,5	1011,2
21. 0. 0	1. 1. 6,5	1519 2	1979,6	1654,9	1011,8
21. 10. 0	1. 1. 40,6	1453,7	1011,6	1721,0	1012,1
21. 20. 0	1. 2. 14,7	1381,7	1947,3	1787,4	1012,4
21. 30. 0	1. 2. 48,8	1308,4	1917,1	1851,7	1012,7
21. 36. 27	1. 3. 10,1	1260,0	1898,1	1891,8	1012,9

§. 10. Hinc pro momentis obſeruationum per interpolationem elementa calculi ſequentem in modum determinabuntur.

Temp. vero Dresd.	Diſtantia Corn.	½Diam.☽ appar.	Diſtant. Centr.	Parall Long. ☽	Parall. Lat. ☽
20^h.31′.21″	0	1010″,9	1958″,4	1695,6	2110 4
a 20. 38. 7,5	10′. 0″,5	1010,9	1863,9	1655,9	2083,6
b 20. 39. 35	10. 46	1011,0	1848,7	1645,8	1081,6
c 20. 47. 8	13. 51	1011,3	1773,5	1598,6	2055,2
d 52. 14	14. 52	1011,5	1751,9	1568,4	2037,4
e 57. 5	15. 15	1011,7	1782,1	1537,8	2021,1
f 59. 50	15. 40,8	1011,8	1718,3	1520,2	2011,8
g 21 4. 52	15. 38	1011,9	1719,8	1487,3	1996,1
b 11. 35	15. 8,7	1012,1	1735,8	1443,3	1974,6
i 14. 41	14. 46,7	1012,2	1753,6	1420,0	1964,5
k 18. 36	14. 0 8	1012,3	1769 9	1391,8	1951,9
l 25. 19	11. 46,7	1012,6	1828,1	1342,8	1931,3
m 28. 19	10. 23,3	1012,7	1858,4	1320,7	1922,2
n 30. 58	9. 13	1012,7	1880 4	1301,3	1914,2
21. 36. 27	0	1012,8	1960,3	1260	1898,2

Cal-

Calculo vlterius producto pro tempore coniunctionis obtinebuntur ſequentes expreſſiones:

Initium	$21^h. 56'. 48''$	$+ 2,55\,\delta$	$- 1,90\,y$	$+ 1,88\,\pi$
a	21. 56. 32	$+ 2,89\,\delta$	$- 2,33\,y$	$+ 2,10\,\pi$
b	21. 56. 48	$+ 2,98\,\delta$	$- 2,45\,y$	$+ 2,15\,\pi$
c	21. 56. 19	$+ 3,64\,\delta$	$- 3,21\,y$	$+ 2,55\,\pi$
d	21. 56. 35	$+ 4,23\,\delta$	$- 3,87\,y$	$+ 2,88\,\pi$
e	21. 56. 45	$+ 5,28\,\delta$	$- 4,99\,y$	$+ 3,47\,\pi$
f	21. 56. 23	$+ 6,31\,\delta$	$- 6,08\,y$	$+ 4,05\,\pi$
g	11. 56. 42	$+ 8,79\,\delta$	$- 8,63\,y$	$+ 5,40\,\pi$
h	21. 56. 8	$+ 24,27\,\delta$	$- 24,20\,y$	$+ 13,74\,\pi$
i	21. 57. 9	$+ 41,34\,\delta$	$- 41,24\,y$	$+ 22,82\,\pi$
k	Latit. ☽ apparens ſuperat diſtantiam Centror. 8''.			
l	21. 58. 55	$- 19,27\,\delta$	$+ 19,18\,y$	$- 9,50\,\pi$
m	21. 58. 39	$- 12,47\,\delta$	$+ 12,34\,y$	$- 7,10\,\pi$
n	21. 59. 41	$- 11,07\,\delta$	$+ 10,86\,y$	$- 6,44\,\pi$
Finis	21. 57. 37	$- 6,51\,\delta$	$+ 6,28\,y$	$- 3,86\,\pi$

§. 11. Expreſſiones *h*, *i* et *l* ob enormem magnitudinem coefficientium correctionibus praefixorum, atque *n* procul dubio ob errorem in ipſa obſeruatione commiſſum ad momentum coniunctionis eliciendum tuto adhiberi nequeunt, ſumto vero ex concluſionibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et *g* medio et combinando illud cum expreſſione *m* prodit aequatio:

$$124 - 17,35\,\delta + 16,85\,\eta - 10,43\,\pi = 0.$$

Cui ſatisfaciunt quam proxime

 $\delta = -$

$\delta = -4, \; \gamma = -1\,2''\tfrac{1}{2}$ et $\pi = -1.$

Expreſſio vero f collata cum fine dabit tempus coniunctionis a correctionibus fere liberum

$$21^h.\; 57'.\; 0'' - 0{,}10\,\delta + 0{,}10\,\gamma + 0{,}09\,\pi.$$

Quanquam hic δ denotet correctionem non ſummae Semidiametrorum, ſed cuiusuis diſtantiae centrorum Solis et Lunae, attamen concluſiones iſtae ſupra allatas egregie confirmate videntur.

§. 12. Obſeruationes Cremiſani circa diſtantias cornuum inſtitutae in Calendario Aſtronomico Berolinenſi ſequentem in modum referuntur:

	Temp. ver. Cremiſ.	Diſtant. Corn.	
Initium	20. 37. 15	0	contactus iam ſenſibilis
A	20. 41. 25½	7. 52,5	
B	20. 47. 8½	9. 48,2	
C	20. 55. 18½	11. 30,6	
D	21. 3. 34½	11. 6,2	dubia
E	21. 10. 44½	10. 6,0	
F	21. 17. 24,3	8. 0,2	
G	21. 19. 16,3	7. 7,0	
Finis	21. 23. 26,3		obſeruatio bona.

Pro qualibet harum phaſium ſeparatim inueſtigando Parallaxes in Longitudinem et Latitudinem Lunae reperi

Pro

	½ Diam. appar.	Diſtant. Centr.	Parall. Long ☽	Parall. Lat. ☽	Lattit. appar.
Pro initio	1011,3	1958,8	1782,0	1943″,0	1639,6
pro phaſi A	1011,3	1900,8	1755,7	1928,8	1668,2
B	1011,5	1868,2	1718,1	1907,0	1709,4
C	1011,8	1832,5	1663,0	1877,8	1766,3
D	1013,1	1842,7	1605,0	1848,4	1823,8
E	1012,7	1863,9	1553,0	1823,6	1873,9
F	1013,0	1900,6	1503,5	1801,5	1927,7
G	1013,2	1913,5	1489,2	1794,6	1930,9
pro fine	1013,2	1960,7	1457,1	1781,5	1958,3

Vnde pro tempore coniunctionis obſeruationes phaſium dabunt ſequentes expreſſiones:

Initium $21^h.\ 58'.\ 54'' + 3{,}12\,\delta - 2{,}61\,y + 2{,}21\,\pi$

A $21.\ 57.\ 19 + 3{,}56\,\delta - 3{,}12\,y + 2{,}46\,\pi$

B $21.\ 57.\ 30 + 4{,}34\,\delta - 3{,}87\,y + 2{,}81\,\pi$

C $21.\ 56.\ 31 + 6{,}39\,\delta - 6{,}16\,y + 3{,}94\,\pi$

E, F, G } Lat. ☽ apparens ſuperat diſtant. centrorum { 10″, 17,1, 17,4

Finis $21.\ \ 2.\ \ 5 + 33{,}89\,\delta + 33{,}77\,y - 15{,}77\,\pi.$

Cum itaque Pater *Filxmillner* correctionem Longitudinis et Latitudinis Lunae inueſtigauerit combinando phaſin A cum fine, dein cum phaſibus G et F, non mirum eſt, quod ad diuerſas a meis peruenerit concluſiones. Vt enim obſeruationes F et G locum habere queant, Latitudo

tudo Lunae plus quam 18 ſcrupulis ſecundis foret minuenda, finis autem Eclipſeos bene obſeruatus, pro quo ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae Latitudinem Lunae apparentem $2''\frac{1}{2}$ adhuc ſuperare reperitur, arguit in obſeruationibus E, F et G leuem aliquem errorem eſſe commiſſum. Idem ipſum phaſes B et C confirmare videntur: combinando etenim phaſin B cum fine, manentibus elementis ſupra adhibitis, correctionem Latitudinis reperio $-11'',3$, et phaſin C cum fine correctionem reperio $-13'',5$.

Non obſtante igitur determinatione Patris *Fixlmillner* in ea ſum ſententia, vt ſtatuam correctionem Longitudinis eſſe quam proxime $+14'',3$ et Latitudinis -13 ſcrupulorum ſecundorum.

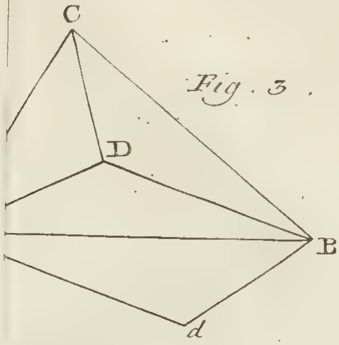


Fig. 3.

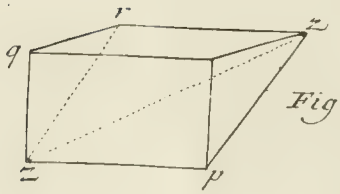


Fig. 6.

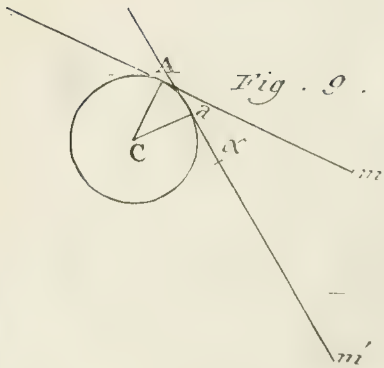


Fig. 9.



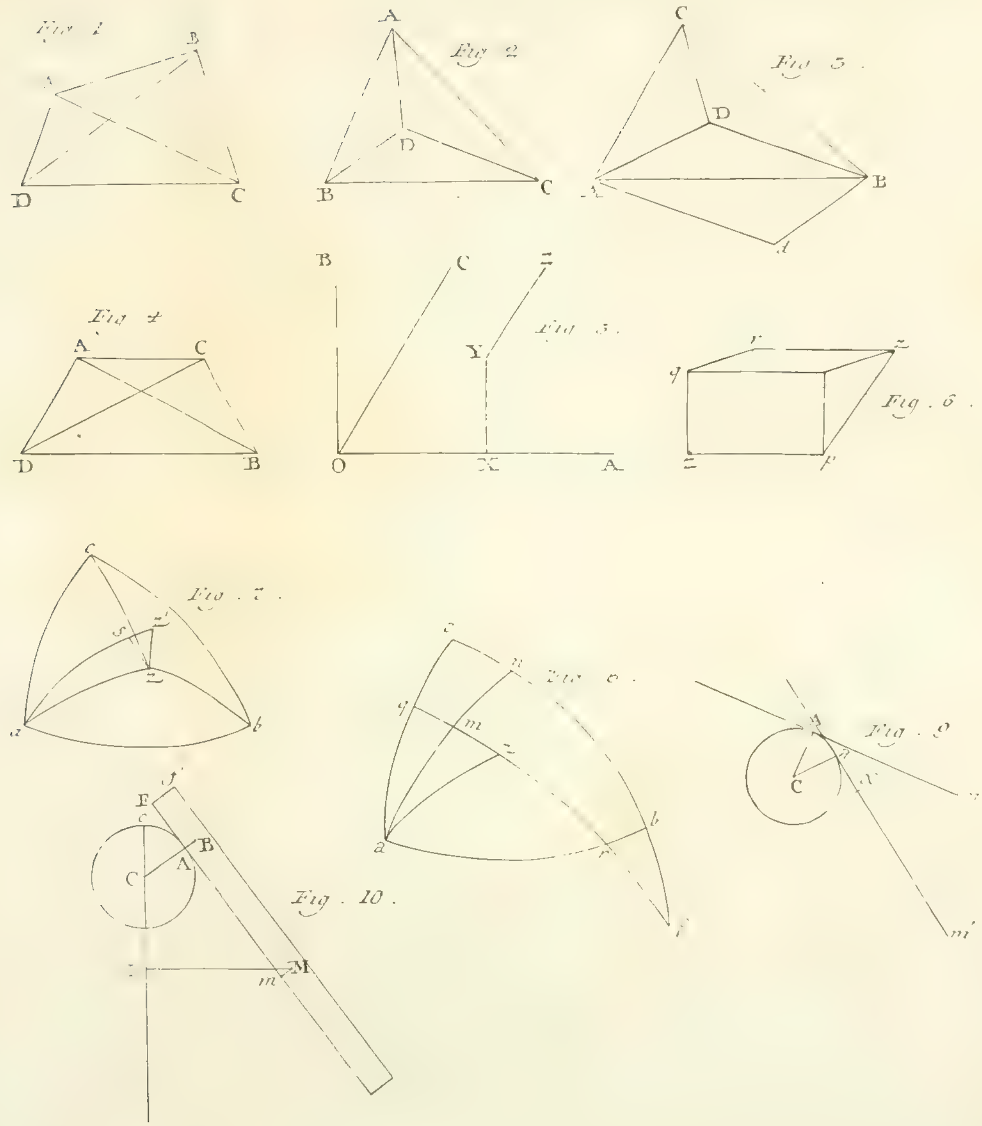

Fig. 1
A
B
C
D
Fig. 2
A
B
C
D
Fig. 3
C
D
A
B
Fig. 4
A
C
D
B
Fig. 5
B
C
Y
O
X
A
q
r
z
p
Fig. 6
Fig. 7
c
a
b
s
Fig. 8
c
n
q
m
z
a
b
r
Fig. 9
C
x
m
F
c
C
B
A
Fig. 10
M
m



Fig . 9 .

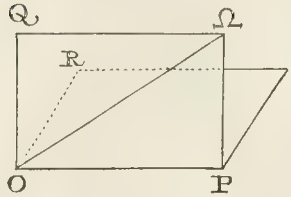


Fig . 5 .

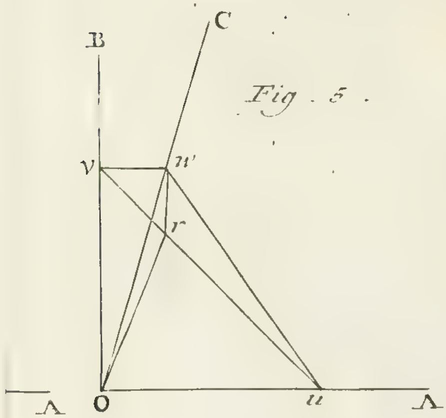


Fig . 8 .

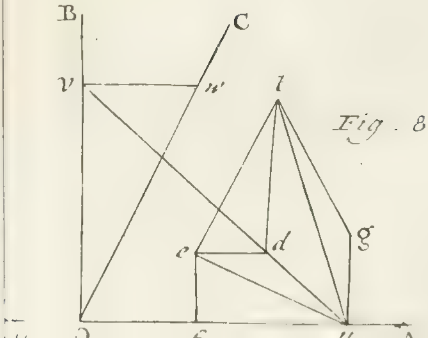


Fig. 1.

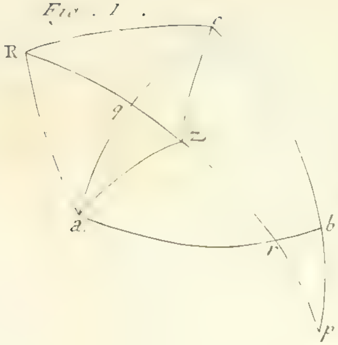


Fig. 2.

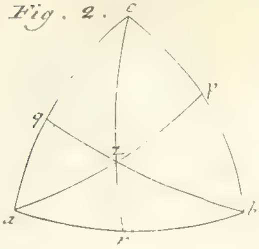


Fig. 9.

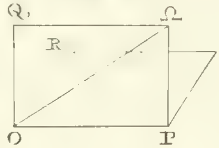


Fig. 3

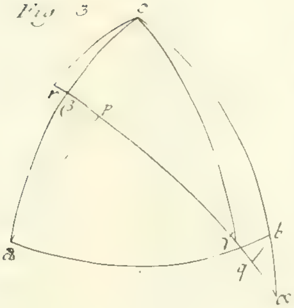


Fig. 4

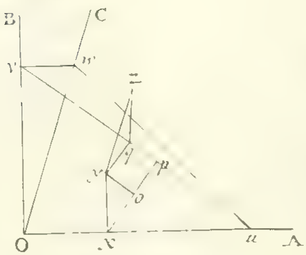


Fig. 5

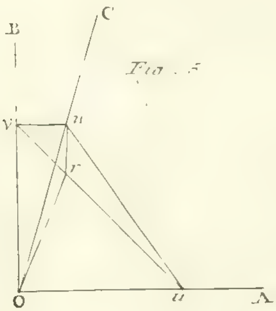


Fig. 6

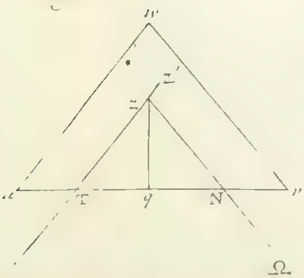


Fig. 7

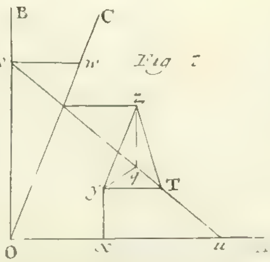


Fig. 8

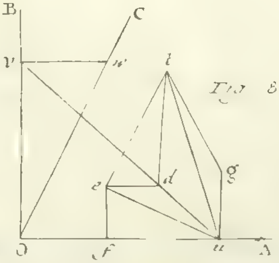
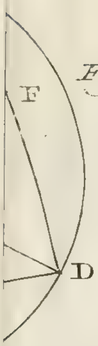


Fig. 2.



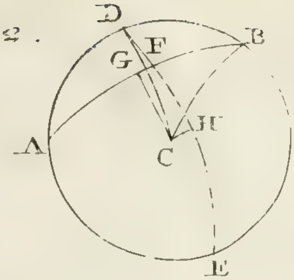
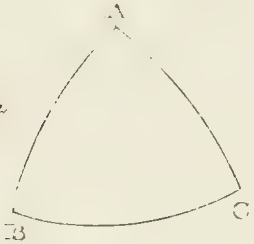


Fig. 3. No. 1.

Fig. 4



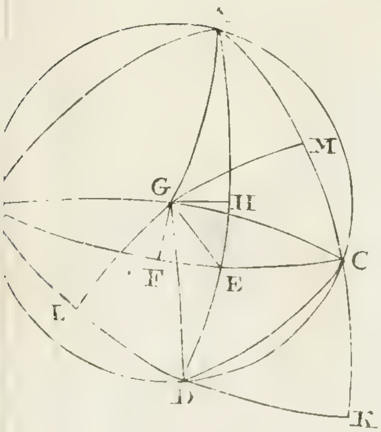
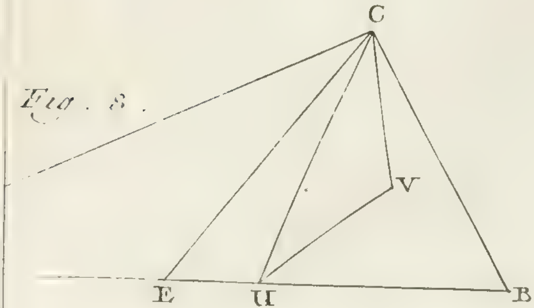


Fig. 8.



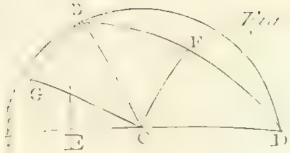


Fig. 1

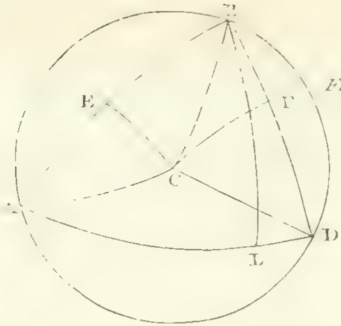


Fig. 2

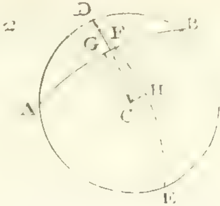


Fig. 3 No. 1

Fig. 3 No. 2

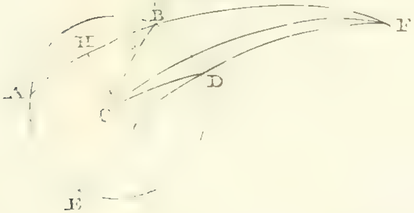


Fig. 4



Fig. 5

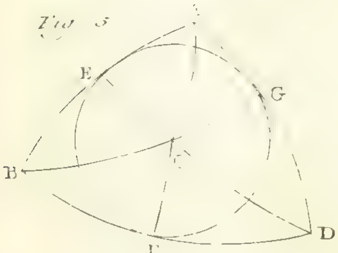


Fig. 6

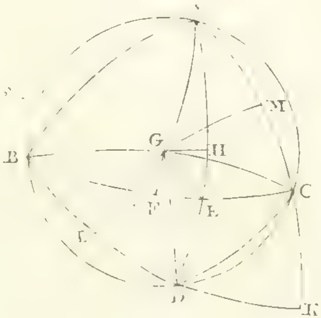


Fig. 7

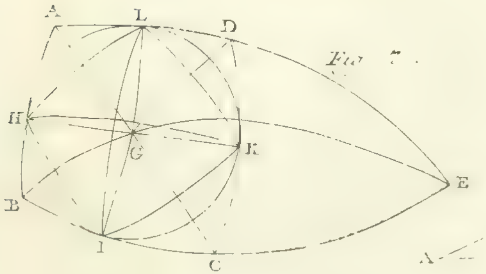
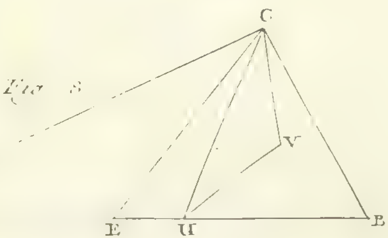


Fig. 8



Imp. Sc. Petropol. Tom. VI. P. I. Tab. IV.

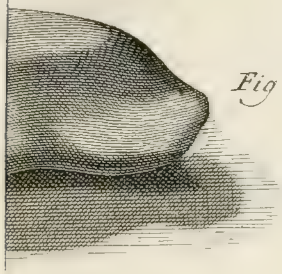


Fig. I.



Fig. II.



Fig. I

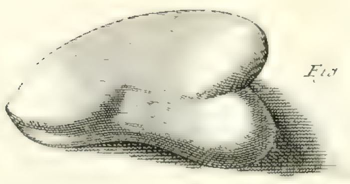
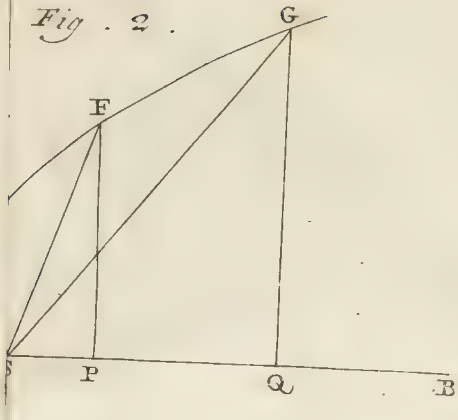
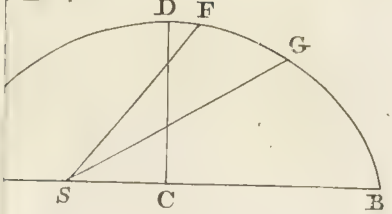


Fig. II

Fig. 2.



4.



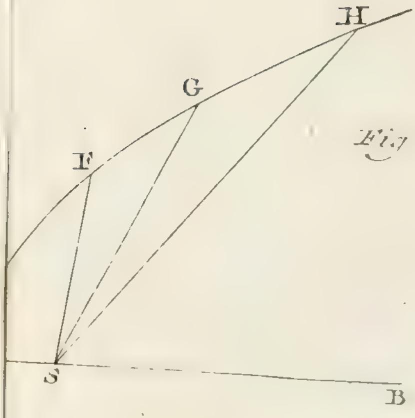


Fig. 6.

Fig. 1.

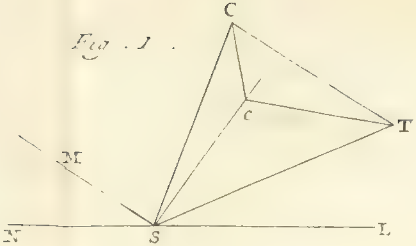


Fig. 2.

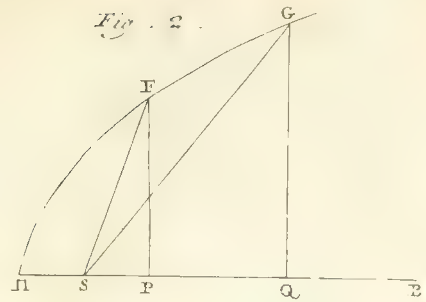


Fig. 3.

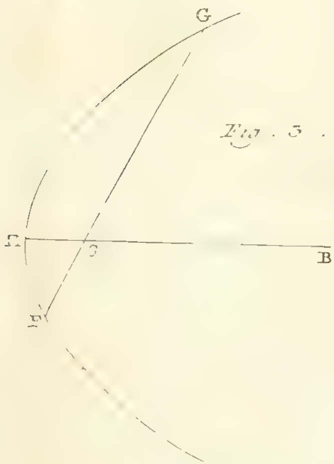


Fig. 4.

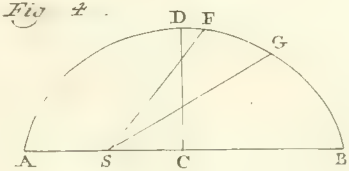


Fig. 5.

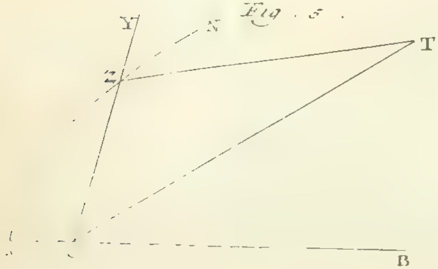
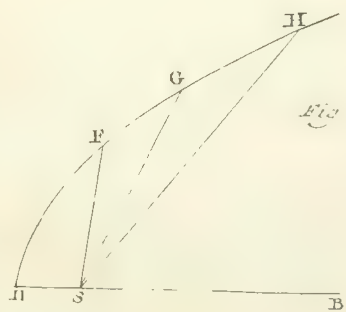


Fig. 6.



Act. ac. Sc. Petrop. 1782 I

Essai sur les tables des mariages, des naissances et des morts de la ville de St. Petersbourg dans la Periode de 17 ans depuis 1764 jusqu'a 1780; precedé d'une exposition generale de l'utilité, qu'auraient de pareilles Tables, si elles s'etendoient sur des Gouvernements entiers de la Russie par Krafft. p. 3.

Extrait des Lettres de Hablizl.

1.) sur la culture des prairies en Boucharie. p. 47.

2.) Observations d'histoire naturelle faites sur les cotes de la mer Caspienne, comuniquée d' Astrabat en Perse le 7 Juill. 1782.

~~Viel~~ Rindvieh zu Astrabat p. 69

Dreierlei Racen von Schaafe p. 70

Büffel. p. 70.

Cancer pulex. p. 71.

Lampyriden. p. 71

De tractatione metallorum cum sulphure auct. Socoloff p. 193.

Idem de natura arsenici. p. 209.

Scrutamen chemicum calculi Accipenseris Husonis s. Belugae. auct. Georgi p. 225

De Calculo ex Accipensere Sturione exemto auct. Oseretzkowsky. p. 234. t. IV. f. 1. 2.

Optima methodus parandi Amalgama cupri auct. Socoloff. p. 237.

Marmorum quorundam imperii Rossici Analysis chemica auct. Georgi p. 253.

AMNH LIBRARY
100125010